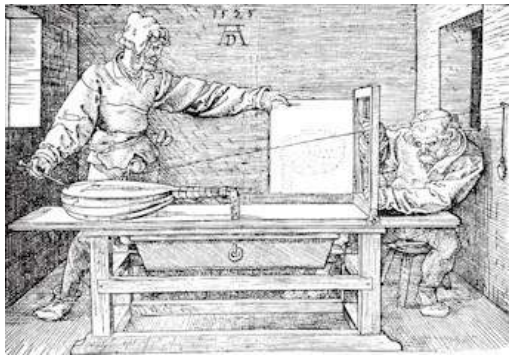
Computer-Graphik I
Projektionen, Perspektive & Viewing Transformation

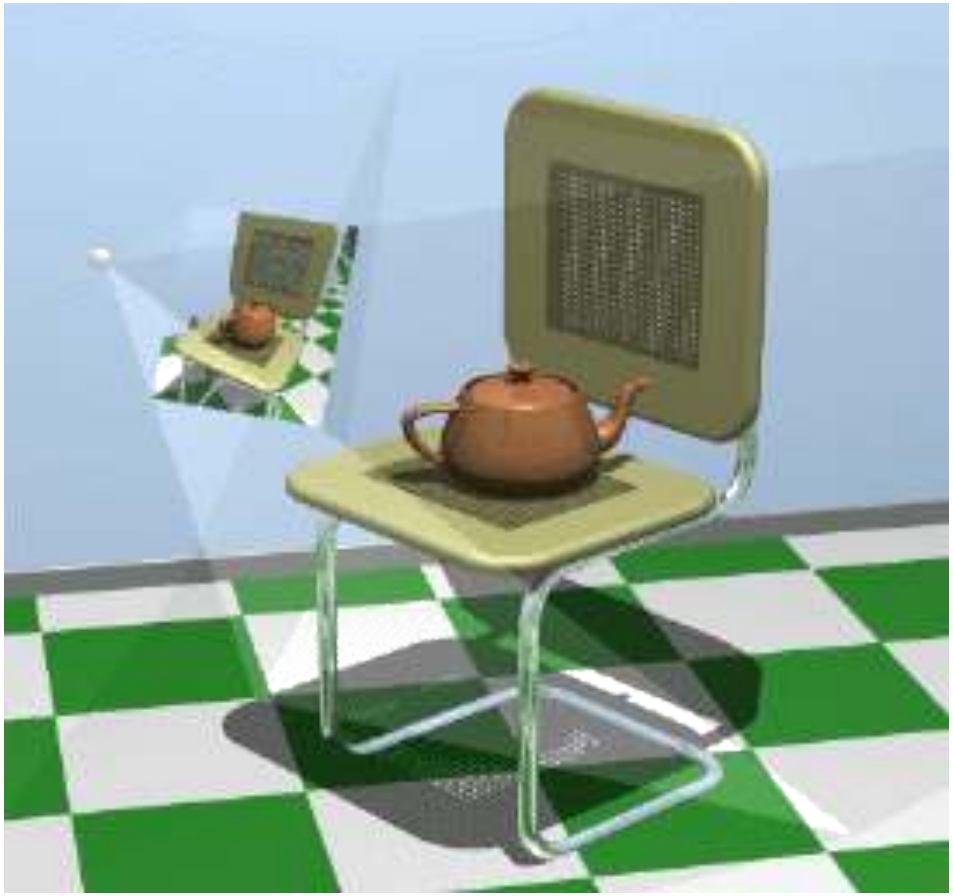


G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de

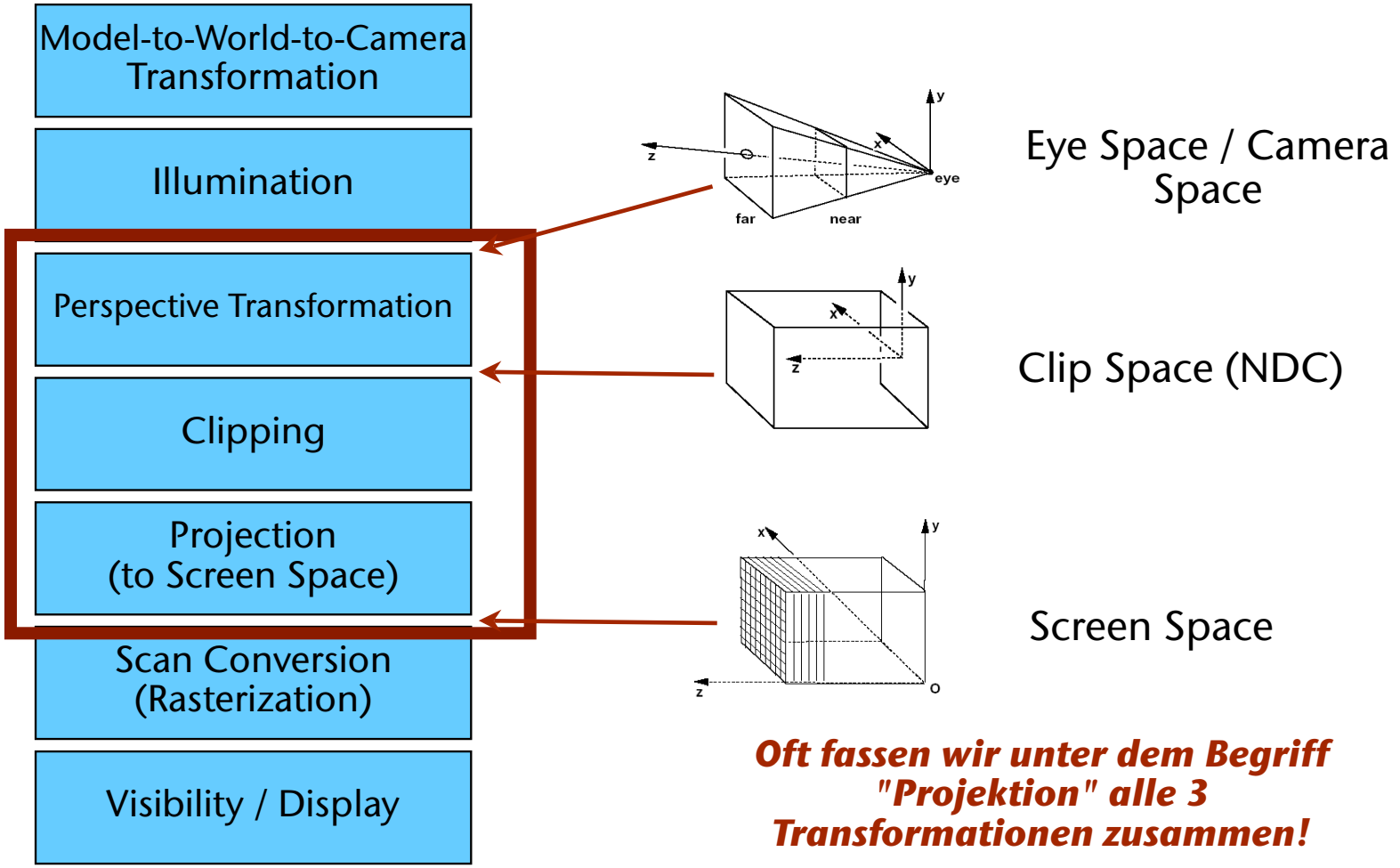
Prinzipielles Vorgehen

- Ziel: die virtuelle 3D Welt auf einem 2D Display darstellen

1. Transformiere die Welt (= World Space; einschließlich der gedachten Kamera) so, daß die Kamera im Ursprung landet und Richtung -Z schaut ⟶ Viewing Transformation
2. Führe die Projektion (i.A. perspektivisch) auf die Bildebene durch ⟶ Projection Transform



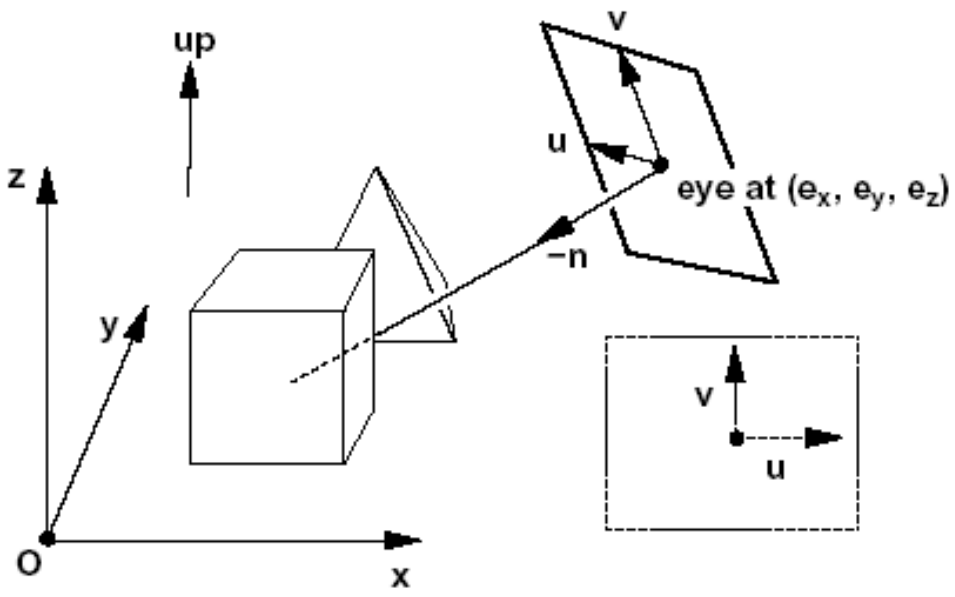
Viewing & Projection Transformation in der Pipeline



Oft fassen wir unter dem Begriff "Projektion" alle 3 Transformationen zusammen!

Transformation von World Space ⟶ Eye Space

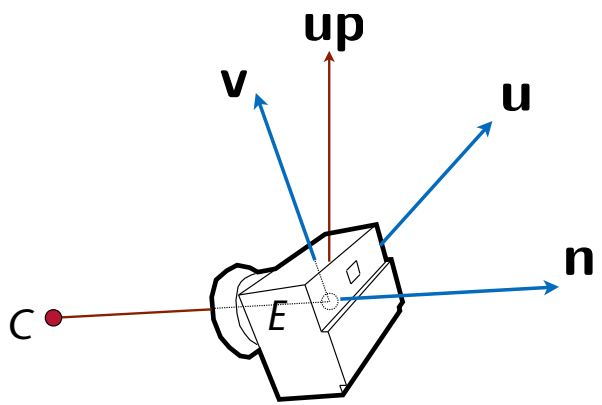
- Heißt Viewing Transformation oder Camera Transformation
  - Manchmal auch kombiniert als *Modelview Transformation*
- Parameter zum Positionieren der Kamera:
  - Augpunkt **E** = (e_x, e_y, e_z)
  - "Up"-Vektor in Weltkoordinaten: dieser Vektor soll senkrecht auf dem Bildschirm erscheinen, also parallel zu **v**
  - Punkt C in Weltkoordinaten, der in der Mitte des Bildes erscheinen soll (heißt auch *Look-At*)
- Aufgabe: daraus das Kamera-koordinatensystem (**u, v, n**) berechnen (*camera space*)



$$\mathbf{n} = \frac{E - C}{\|E - C\|}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{n}|}$$

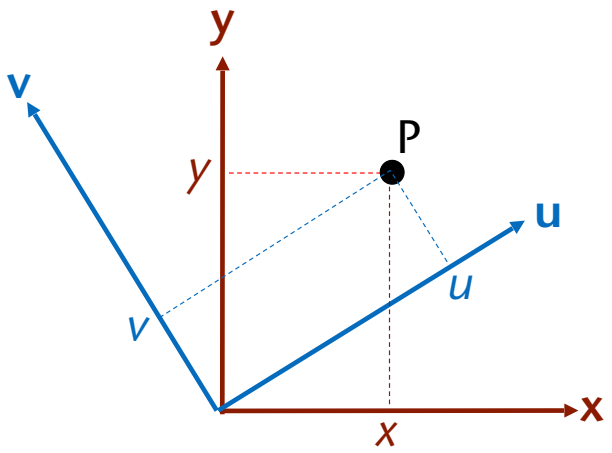
$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$$



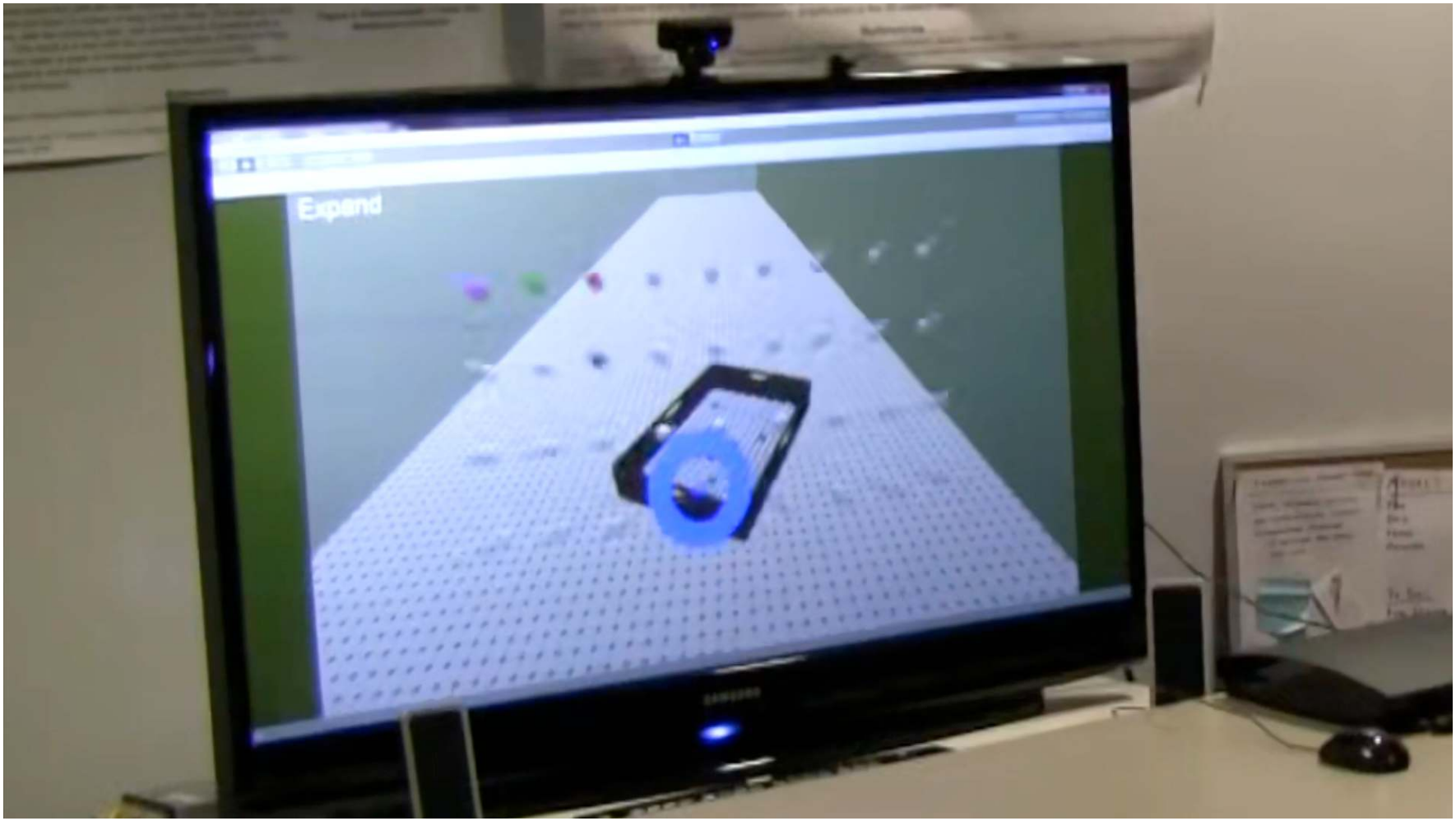
Umrechnen von Koordinaten als Basis-Wechsel

- Transformation von Weltkoord. nach Kamerakoord. = Translation + Wechsel der Basis
- Gegeben: Koord.achsen **x,y,z** & **u,v,n** und ein Vertex P = (p_x, p_y, p_z)
- Bestimme P in **u,v,n**-Koord., also P' = (p_u, p_v, p_n)
- Wechsel der Basis:

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$



Beispiel-Anwendung: die *Expand* Selektionstechnik in VR



- Zwei Phasen; in Phase 2 müssen Kandidaten-Objekte in einem 2D-Gitter im Screen-Space arrangiert werden
- Problem: relative Anordnung zueinander sollte möglichst erhalten bleiben
- Lösung:
  - Bestimme die Mittelpunkte der Objekte in 3D
  - Transformiere diese nach Kamerakoord. (u,v,n)
  - Ignoriere die z-Koord. (= orthographische Projektion)
  - Ordne diese Obj.-Mittelpunkte zu 2D-Gitterzellen in der u,v-Ebene zu
    - Wie?
  - Konvertiere die Zellen-Mittelpkte in 3D-Punkte, erzeuge animierte Translation in 3D von der ursprünglichen Position dorthin

Perspektive in der Kunstgeschichte

- Erste Ansätze:

Giotto: Jesus vor Kaiphas (1305)

Brunelleschi's "Peep show" in Florenz, ca. 1410-1420

The Baptistry, San Giovanni, Florence

Duomo and Piazza del Duomo, Firenze

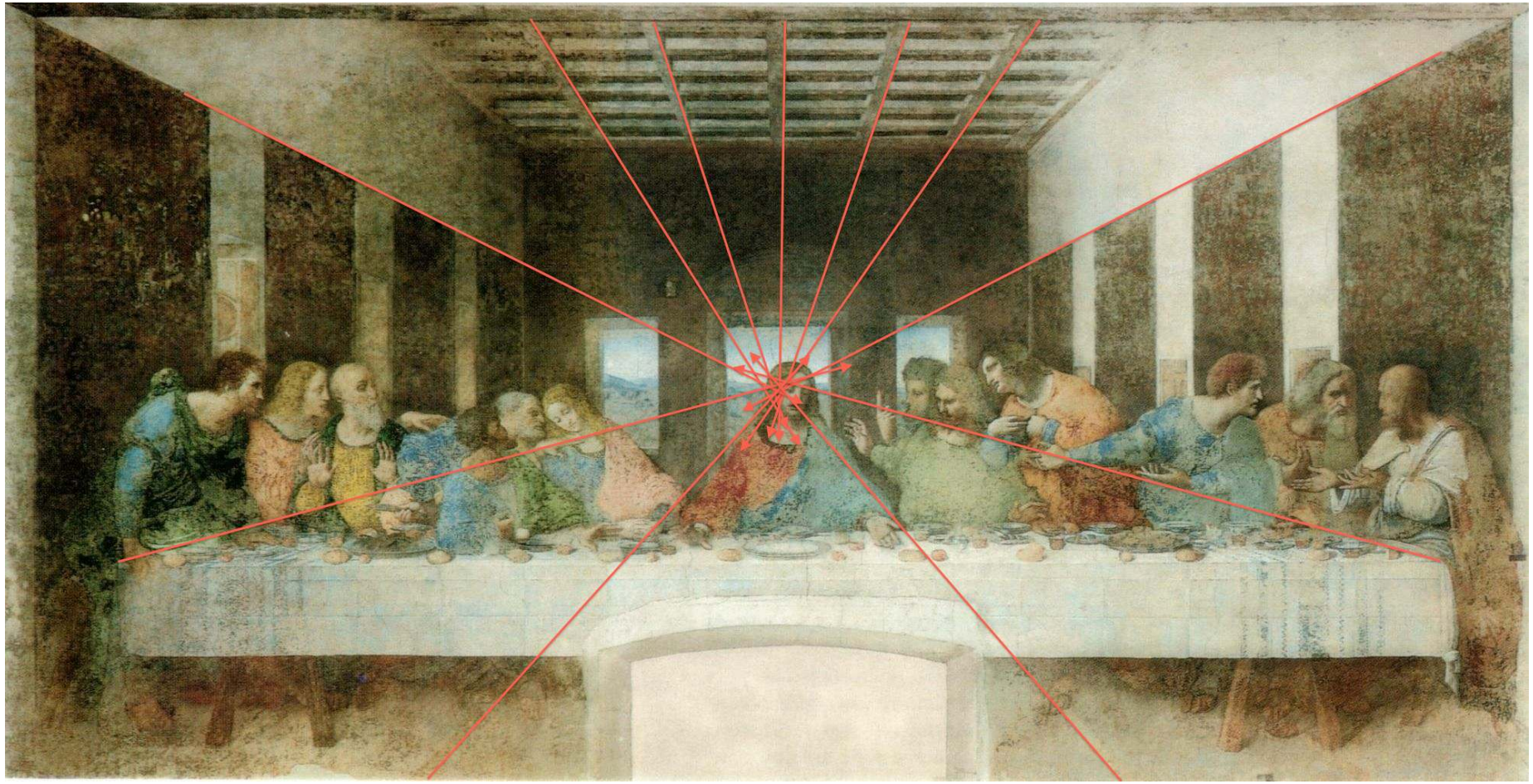
Es dauerte eine Weile bis das Know-How europaweit bekannt war ...

Reconstruction of the temple of Jerusalem.
From William of Tyre: Histoire d'Outremer.
France, Rouen, XVe siècle
Artist: Maître de l'Échevinage
Ca. 1460-1470

Schachbrettmuster wurden sehr beliebt

Christ Handing the Keys to St. Peter
Pietro Perugino (1481-82), Fresco, Sixtinische Kapelle, Vatikan

Der gezielte Einsatz der Perspektive: da Vinci's Abendmahl



1494 — 1498

In der Werbung

Erste perspektivische "Rätsel"

Die Gesandten
Hans Holbein der Jüngere
(1533)

Hat Vermeer eine Camera Obscura benutzt? (Evtl. sogar mit Linse?)

Eine Satire über Perspektive

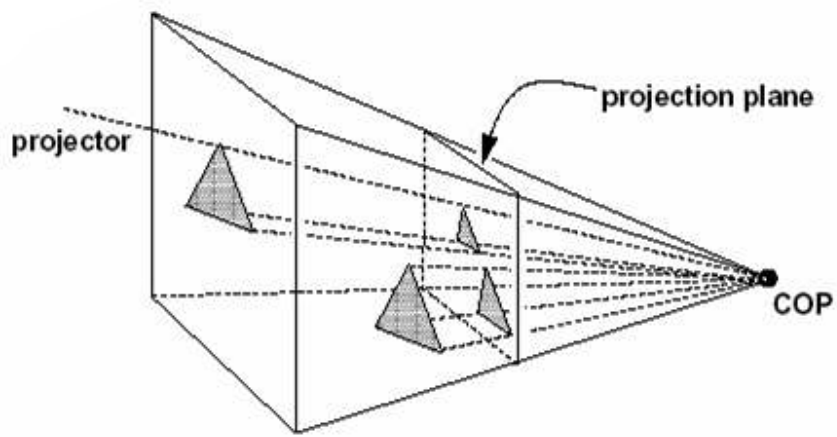
"Satire on False Perspective"
by William Hogarth, 1753

Bildunterschrift:

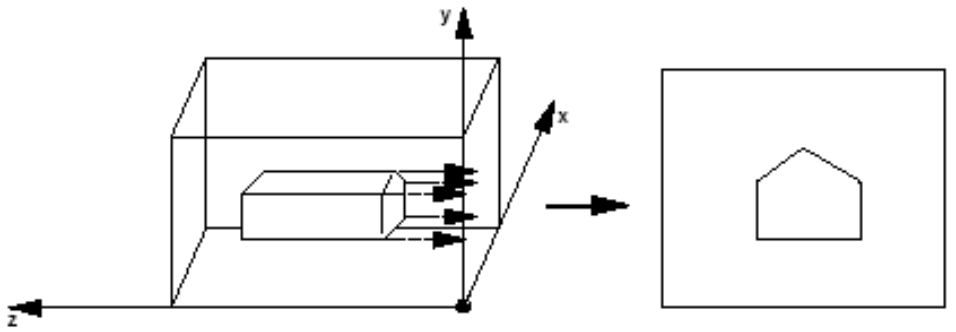
Whoever makes a DESIGN without the Knowledge of PERSPECTIVE will be liable to such Absurdities as are shewn in this Frontispiece.

Orthographische vs. Perspektivische Projektion

- Perspektivische Projektion =
  alle Projektionsstrahlen laufen im Projektionszentrum (COP) zusammen

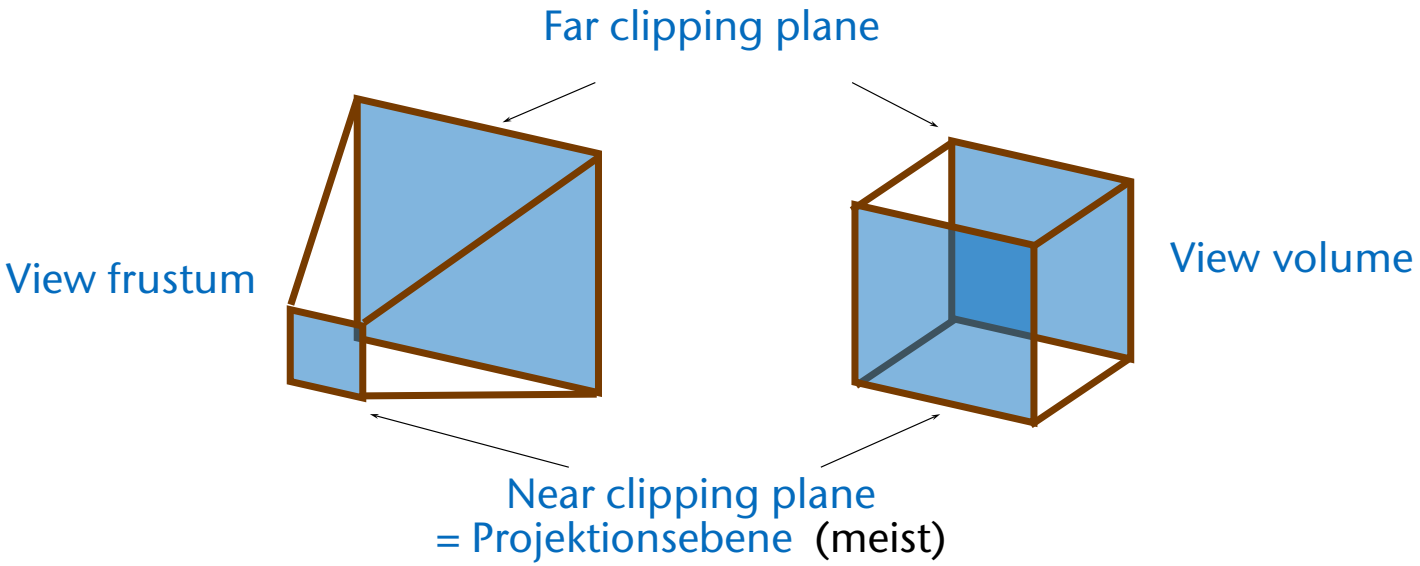


- Orthographische Projektion =
  parallele Projektionsstrahlen
  - Kann man als Spezialfall der perspektivischen Projektion betrachten



Terminologie

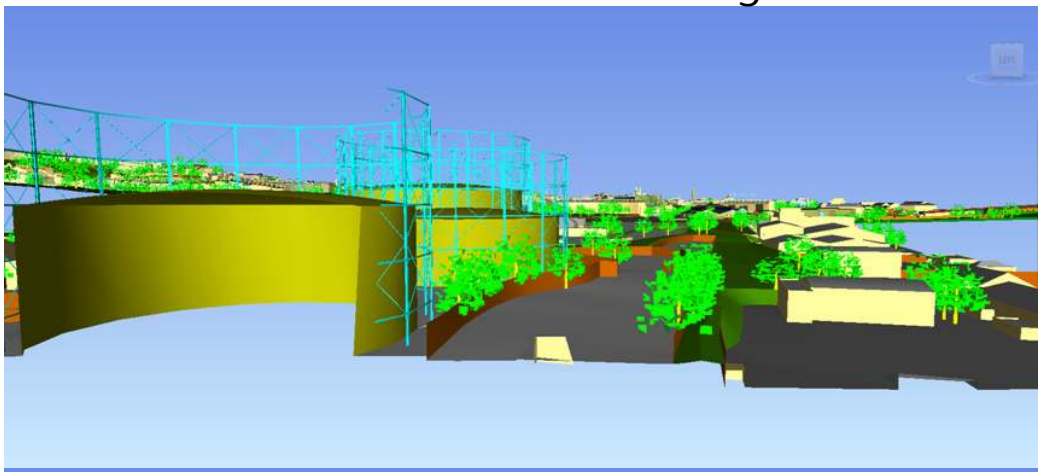
- Der Bereich des 3D-Raumes, der auf den Bildschirm projiziert wird, heißt View Volume, oder Viewing Volume
- Bei perspektivischer Projektion heißt er auch View Frustum
  - Lat. "frustum" = (abgebrochener) Brocken

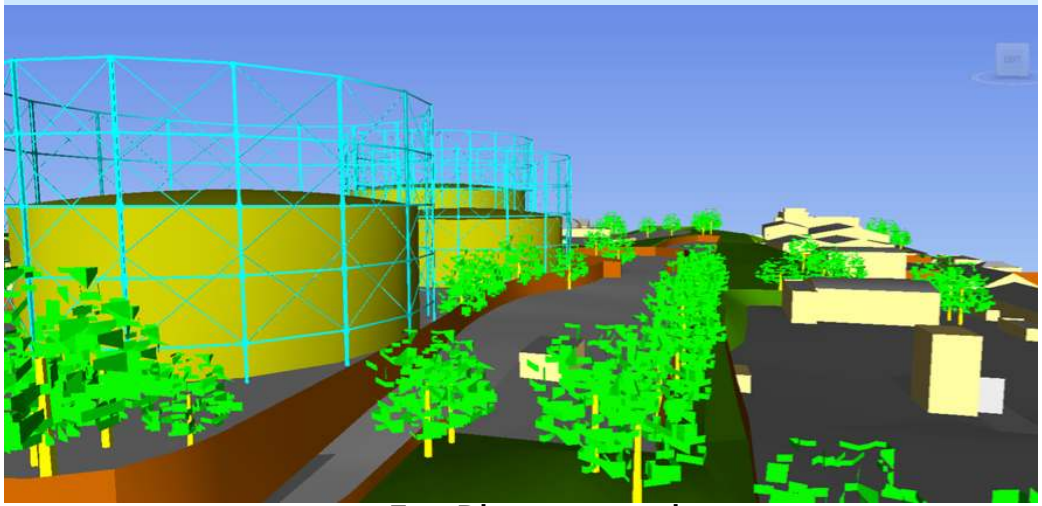


Die richtige Wahl der Near- und Far-Plane

Szene von oben

Near-Plane zu weit weg

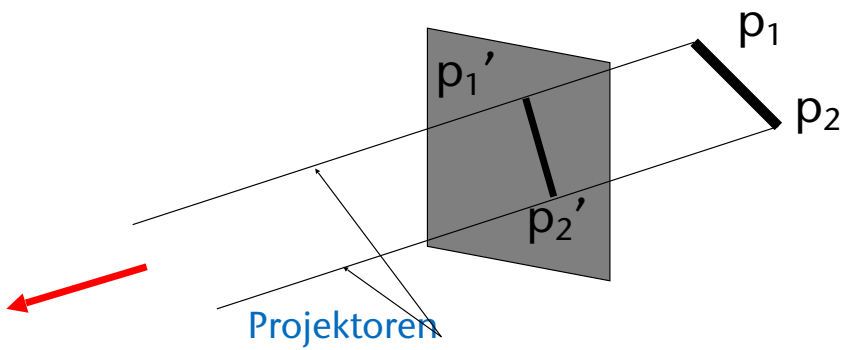


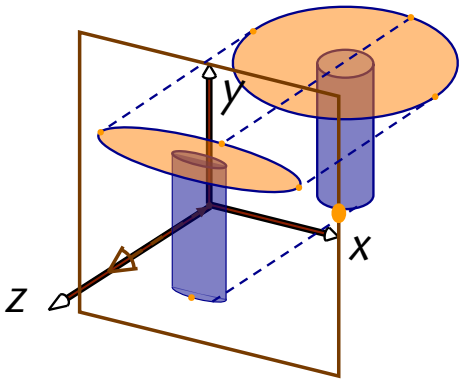


Far-Plane zu nah

Orthographische Projektion

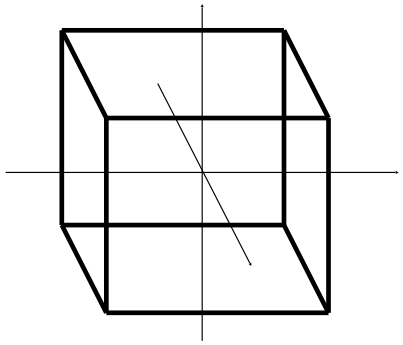
- Punkte werden orthogonal auf die Projektionsebene (*viewing plane*) projiziert
  - Projektionslinien verlaufen senkrecht zur Projektionsebene
- Eigenschaften:
  - Parallele Linien bleiben parallel
  - Winkelverhältnisse bleiben erhalten, aufgrund der parallelen Verschiebung zur Projektionsebene
- Es gibt noch andere (schiefe) Parallel-Projektionen





Die Projektionsmatrix

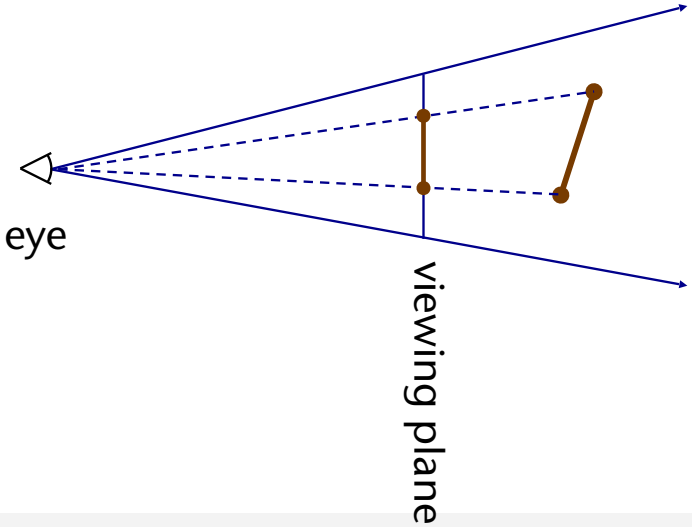
- Annahme: die komplette "virtuelle Welt" befindet sich im (kanonischen) Viewing-Volume (-1,-1,-1) bis (1,1,1)
- Die x- und y-Komponente bleiben unverändert
- Projektionsmatrix setzt z-Komponente auf 0:

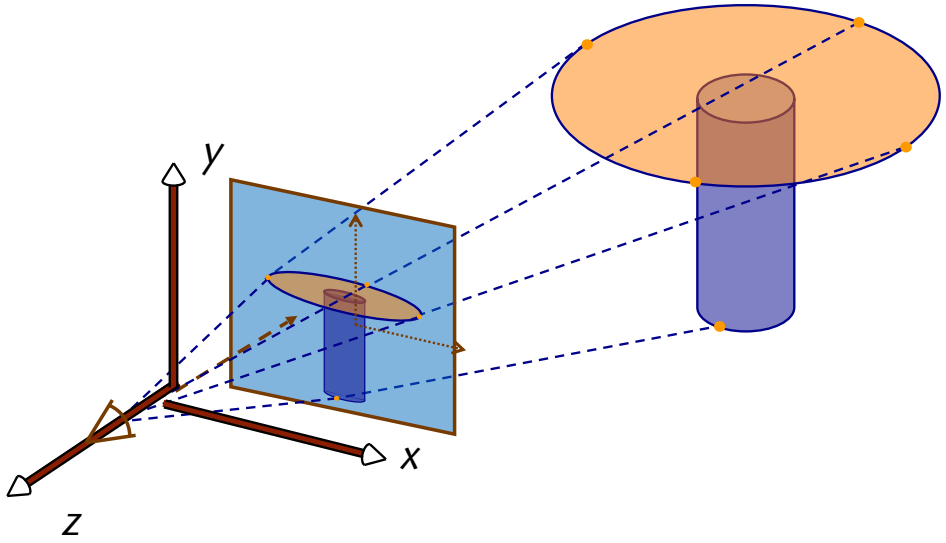


$$P_{\text{ortho}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perspektivische Projektion

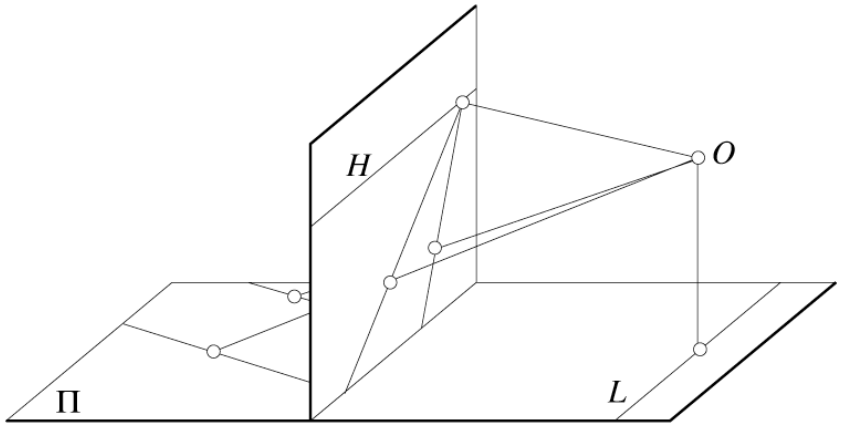
- Wird am häufigsten verwendet in der Computergraphik & Malerei (früher)
- Unser Auge führt eine Zentralperspektive durch ("Lochkamera")
- Punkte werden entlang einer Gerade zum Zentrum der Projektion (COP; z.B. Mittelpunkt der Augenlinse) auf die Bild-Ebene (viewing plane) projiziert



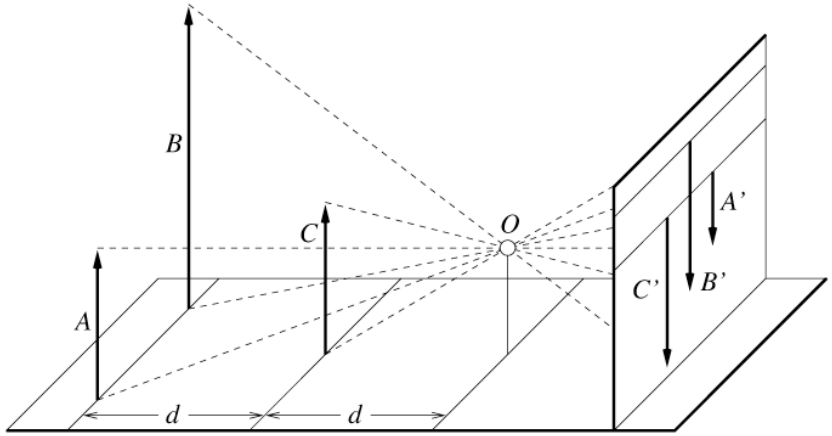


Veranschaulichung der Eigenschaften der perspektivischen Projektion

- Parallele Linien bleiben *nicht* parallel



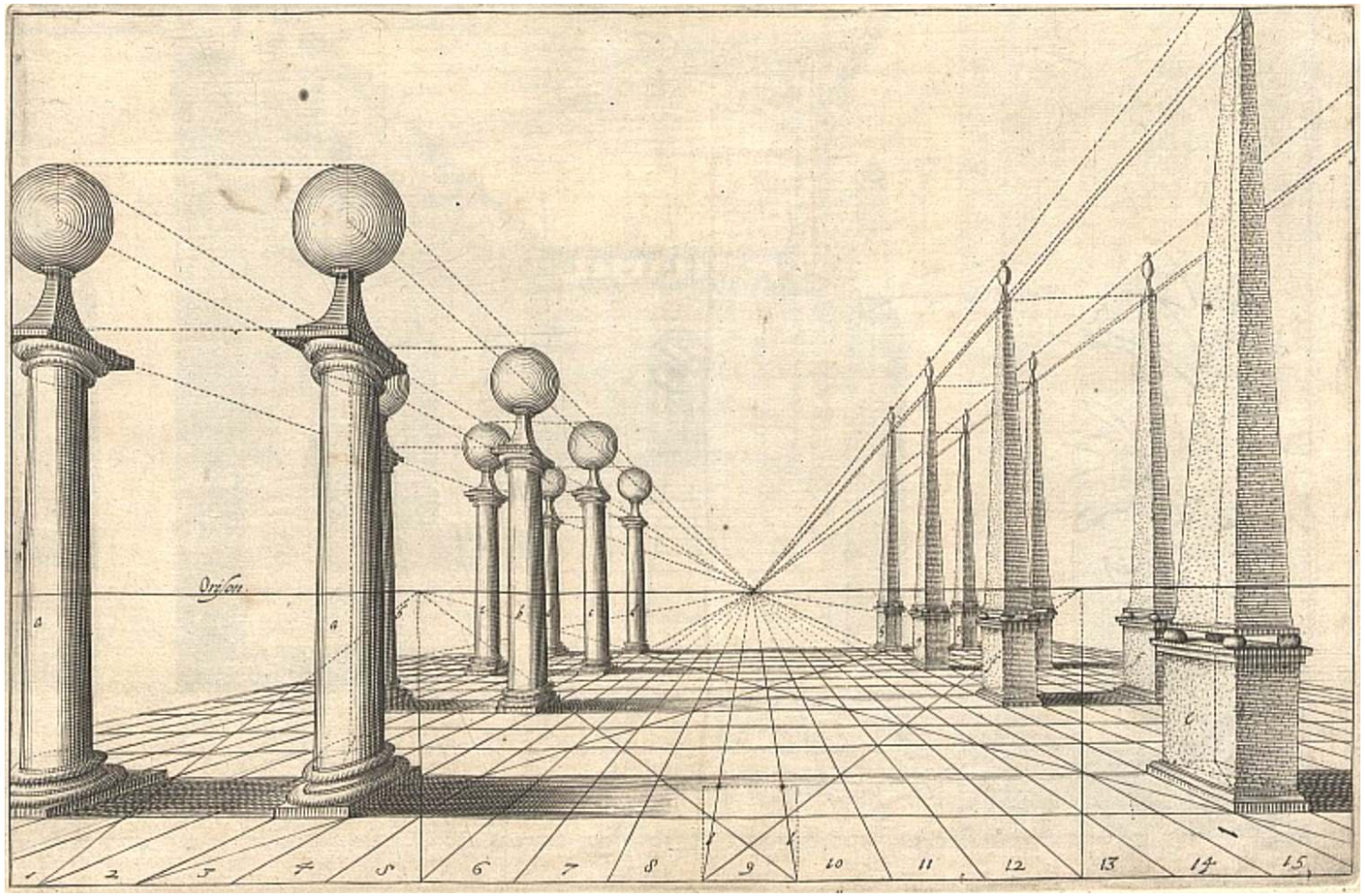
- Längen im Bild hängen von der Tiefe ab

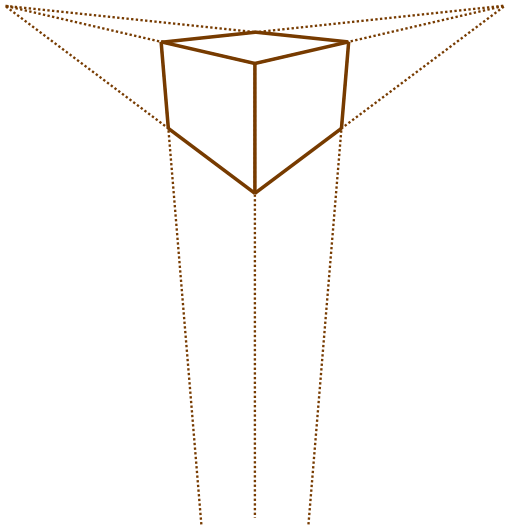


Eigenschaften

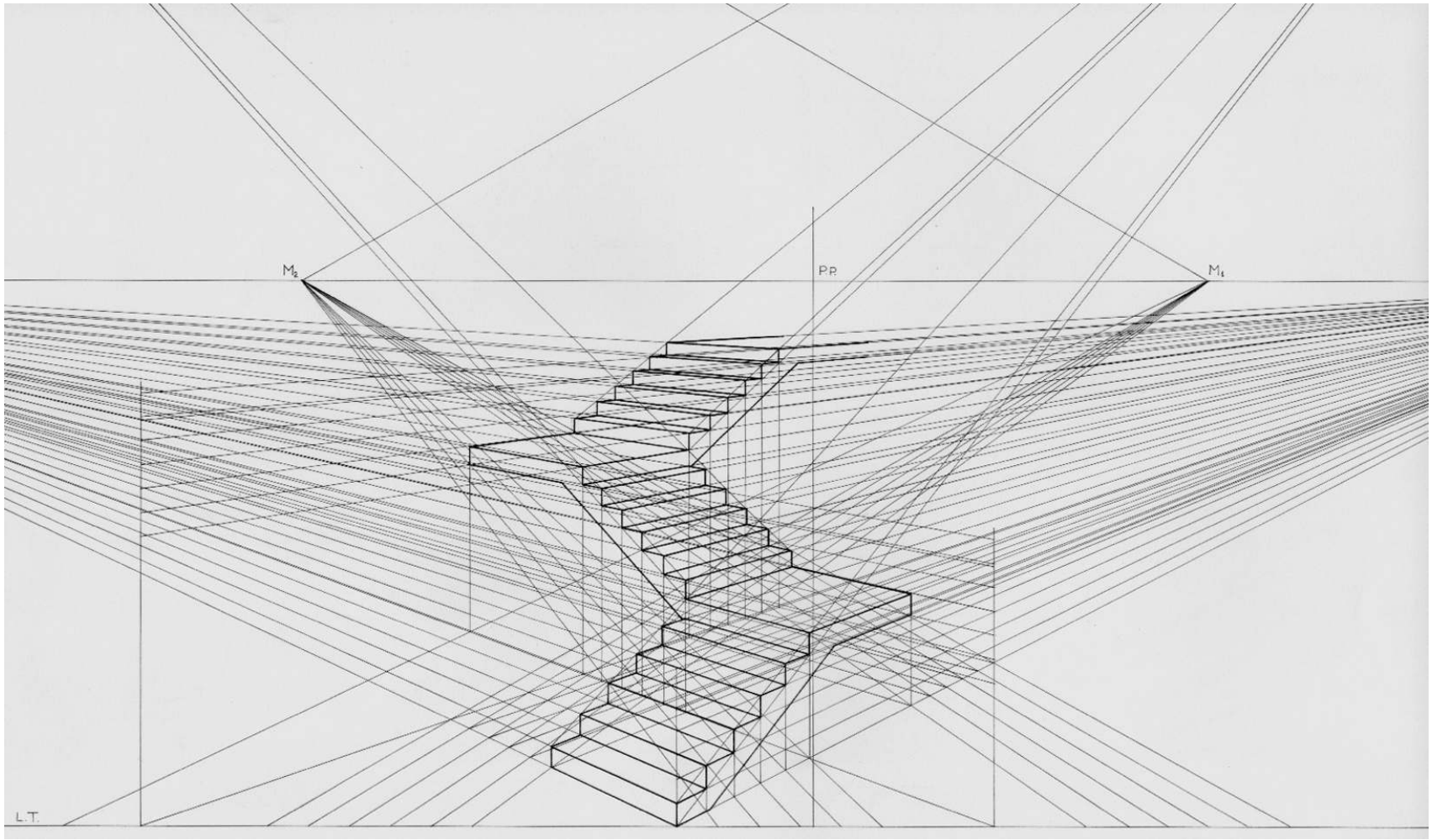
- Entfernte Objekte sind kleiner (perspektivische Verzerrung)
- Parallele Linien werden nicht auf parallele Linien abgebildet, sondern laufen scheinbar in einem gemeinsamen Punkt zusammen
  - Solch ein Punkt heißt Fluchtpunkt
- Alle Bündel von parallelen Linien, die horizontal sind (müssen nicht notw. in einer horizontalen Ebene liegen!), haben (jeweils) einen Fluchtpunkt, der auf der Horizontlinie im Bild liegt
- Zu jeder Schar von Ebenen im 3D gehört eine solche "Fluchtpunktlinie" im Bild

Konstruktion in der Malerei





3-Punkt-Perspektive

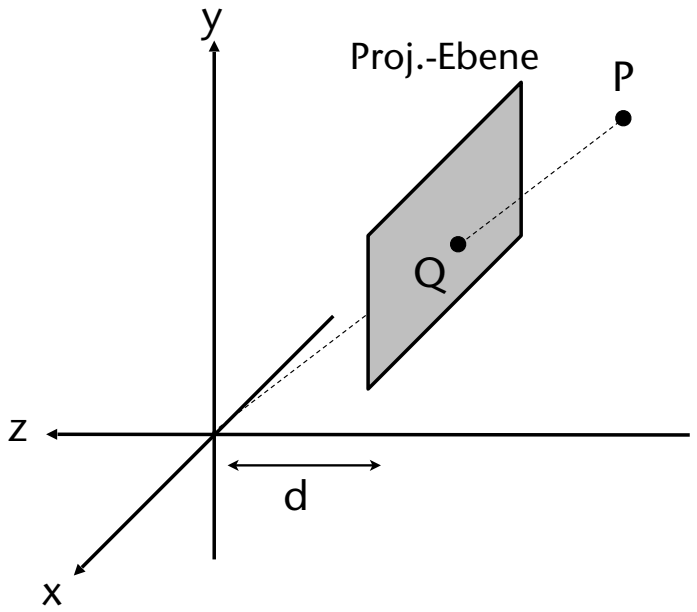

M₂
PP
M₁
L.T.

Die Projektionsmatrix

- Ann.: Kamera im Ursprung, schaut in Richtung negative z-Achse
- Projektion auf eine Ebene $z = -d$, $d > 0$

$$Q = \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$$

$$Q = P_{\text{persp}} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

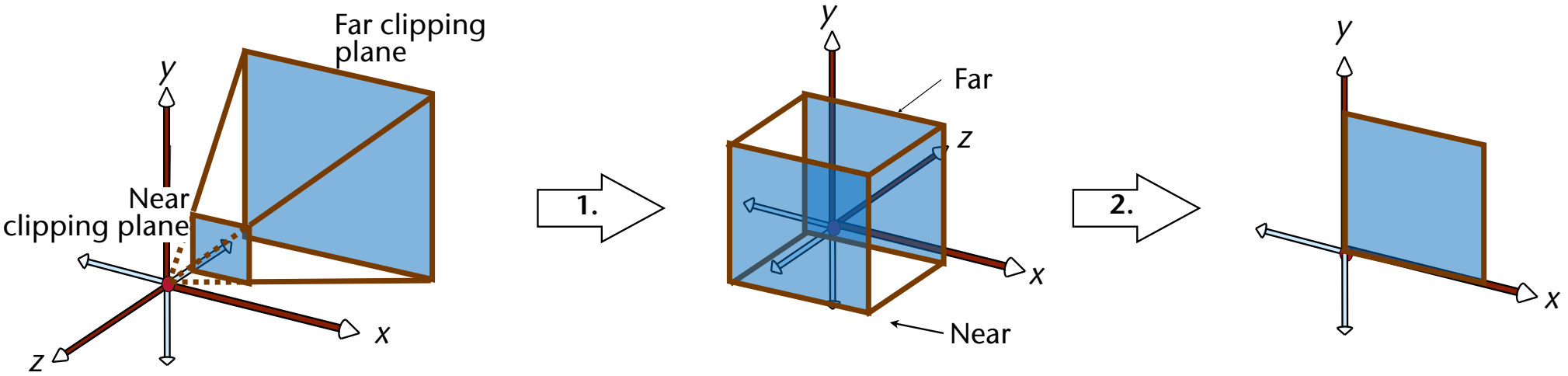


- Anschließend Projektion auf Ebene $z = 0$ (einfach z-Koord. weglassen)
- Beachte: für den Z-Buffer braucht man die z-Werte in Kamera-Koord.! (Die werden als Vertex-Attribute an den Rasterizer durchgereicht)
- Beachte:
  - Wenn d $\longrightarrow \infty$, dann entspricht P_{persp} der orthographischen Projektion
  - Wenn d $\longrightarrow 0$, dann wird $Q = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$ numerisch instabil!
    - Konsequenz: near Wert der Clipping Plane nicht zu klein machen

Perspektivische Projektion in 2 Schritten

- Wegen Clipping macht man die perspektivische Projektion in zwei Schritten

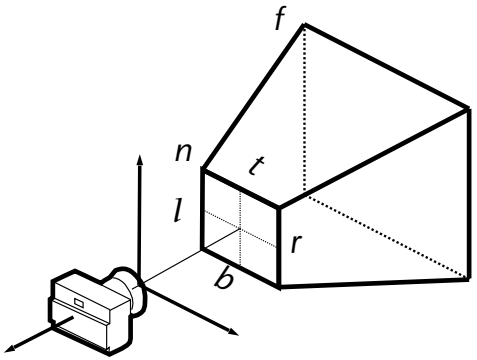
1. Perspektivische Abbildung (noch keine Projektion, im Vertex-Shader)
   - Achtung: enthält Übergang von Recht- auf Links-System!!
2. Projektion auf Ebene (einfach Z-Koord. weglassen, automatisch)



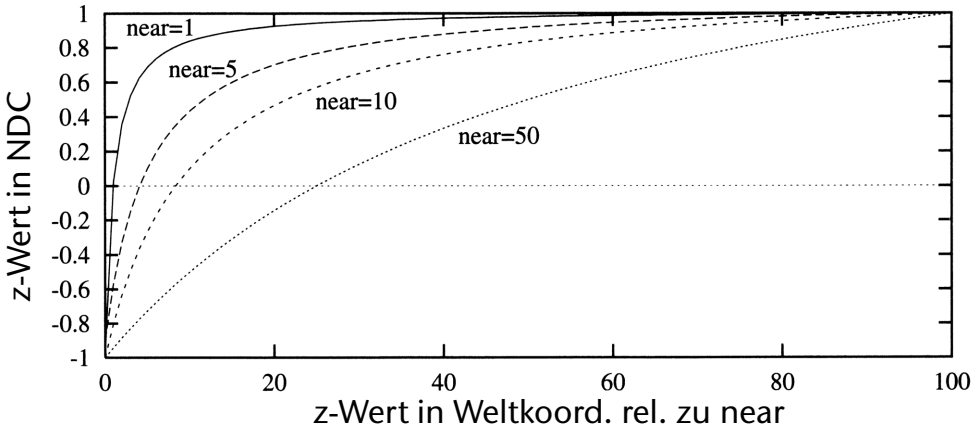
Camera space | Normalized device coordinates (NDC) | Screen space

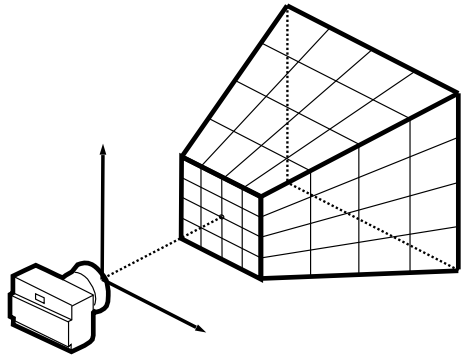
- Die Matrix für Schritt 1 (o. Bew.):

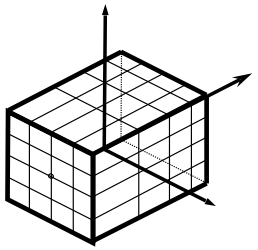
$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Achtung: der z-Wert in NDC hängt **nicht linear** vom z-Wert in Weltkoordinaten ab!

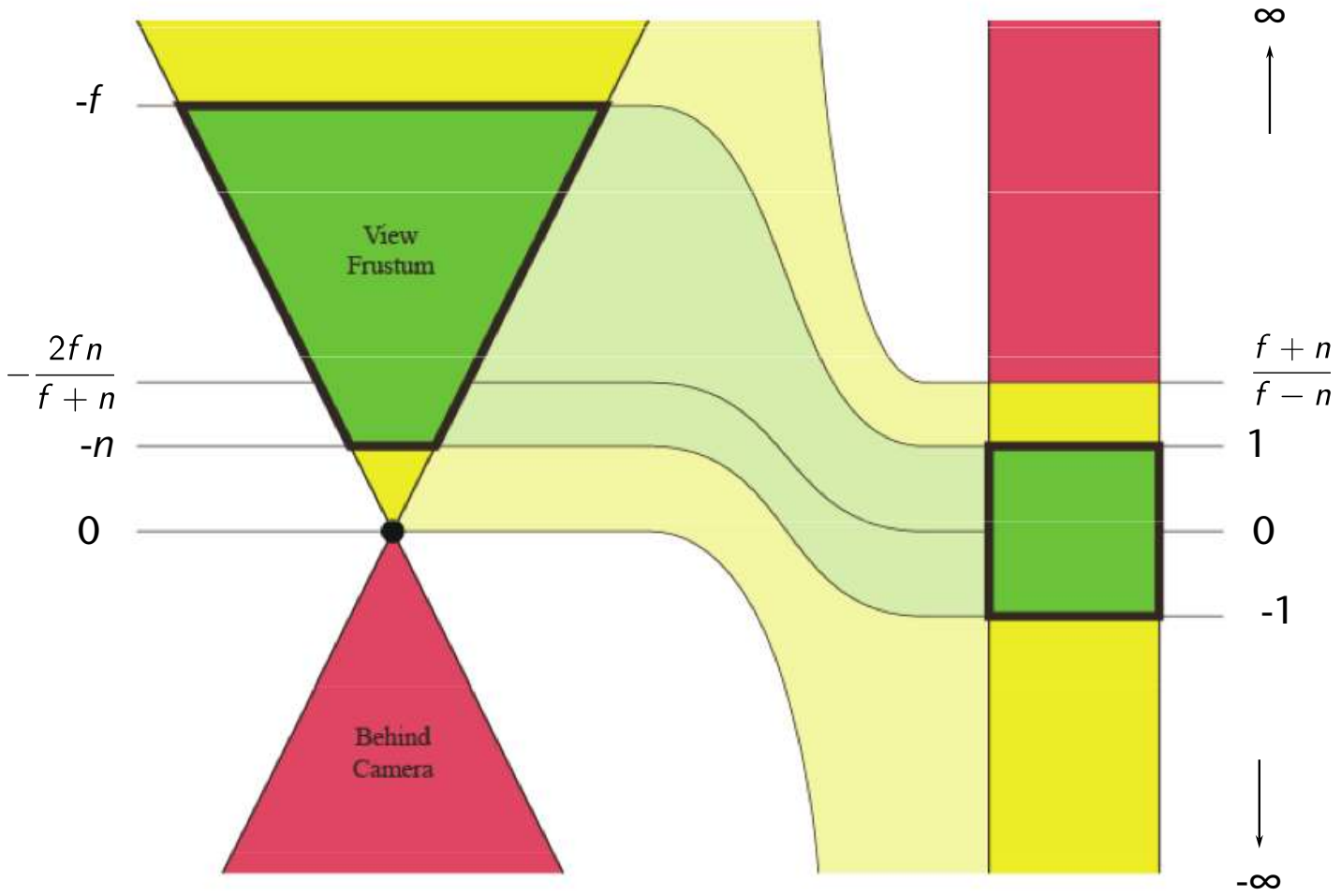






Visualisierung des Z-Werte-Bereiches

Camera Space



Normalized Device Coords

Allgemeine projektive Transformationen FYI

- Die allgemeine Matrix $B = \begin{pmatrix} A & b \\ q^T & w \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad b, q \in \mathbb{R}^3, \quad w \in \mathbb{R}$

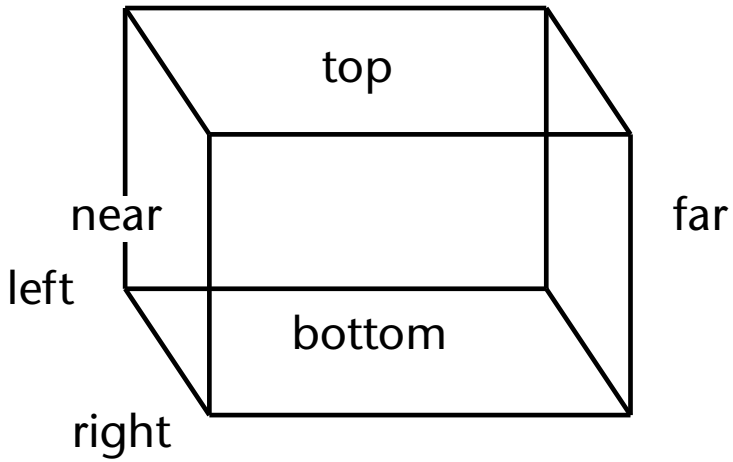
  entspricht für $y = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}^3$, der Abbildung

$$\psi : x \mapsto \frac{Ax + b}{q^T x + w}$$

- B und λB beschreiben dieselbe Abbildung ($\lambda \neq 0$)
- Bildet Geraden auf Geraden ab
- Erhält i. A. ***weder*** Parallelität ***noch*** Teilungsverhältnisse
- Erhält aber Doppelverhältnisse

Projektionsmatrizen mit Qt für OpenGL FYI

- Orthographische Projektion



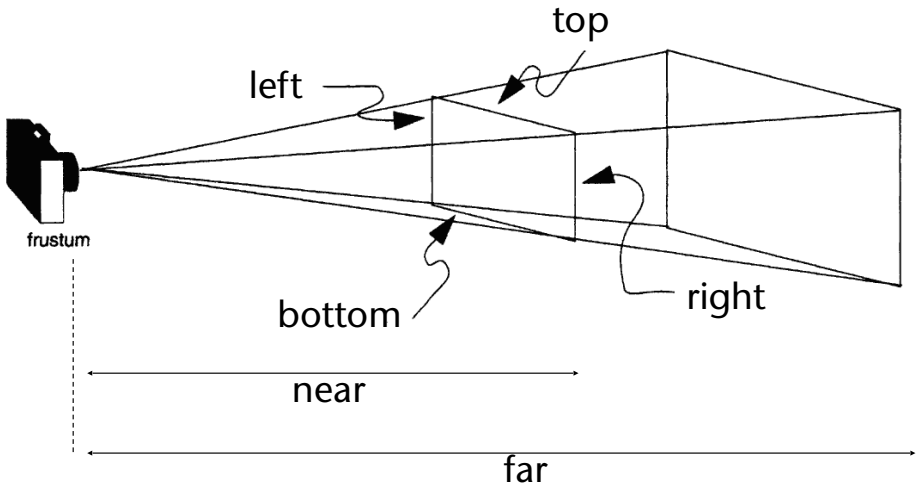

```
QMatrix4x4::ortho(left, right, bottom, top, near, far);
```

http://doc.qt.io/qt-5/qmatrix4x4.html

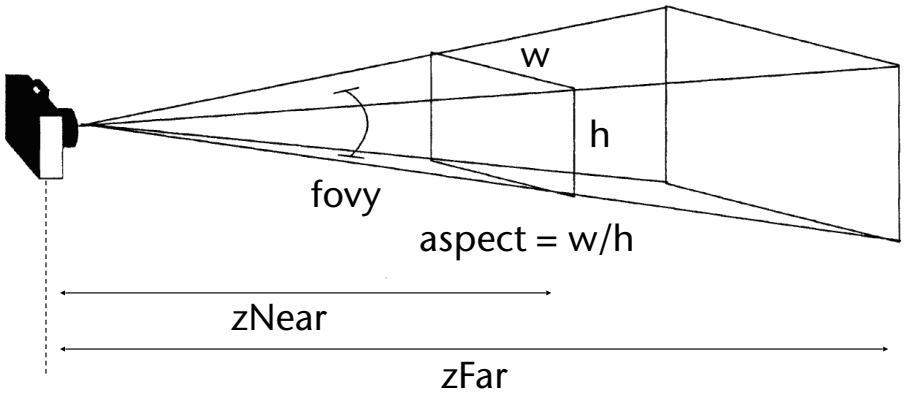
FYI

- Perspektivische Projektion:

```
QMatrix4x4::frustum(
    left, right,
    bottom, top,
    near, far );
```

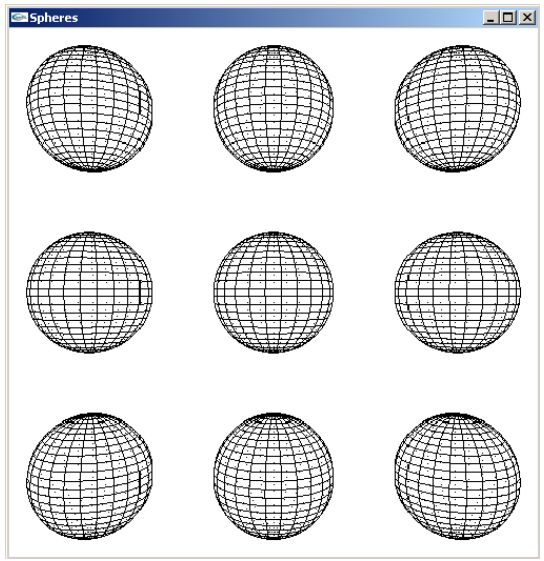



```
QMatrix4x4::perspective(
    fovy, aspect,
    zNear, zFar );
```

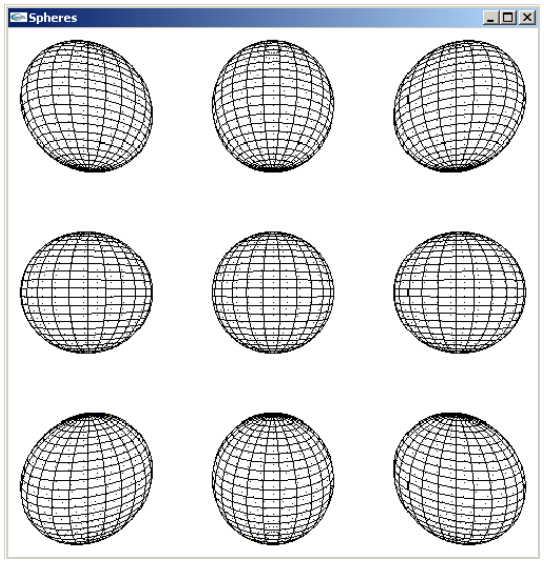


http://doc.qt.io/qt-5/qmatrix4x4.html

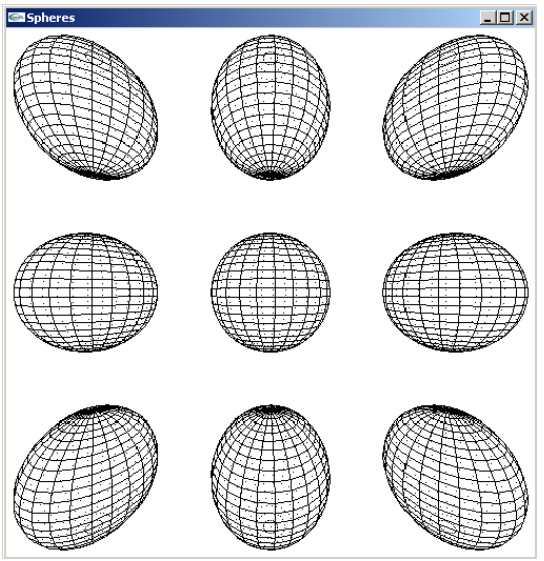
Vorsicht bei Perspektive: Field-of-View (Öffnungswinkel) nicht zu groß wählen!



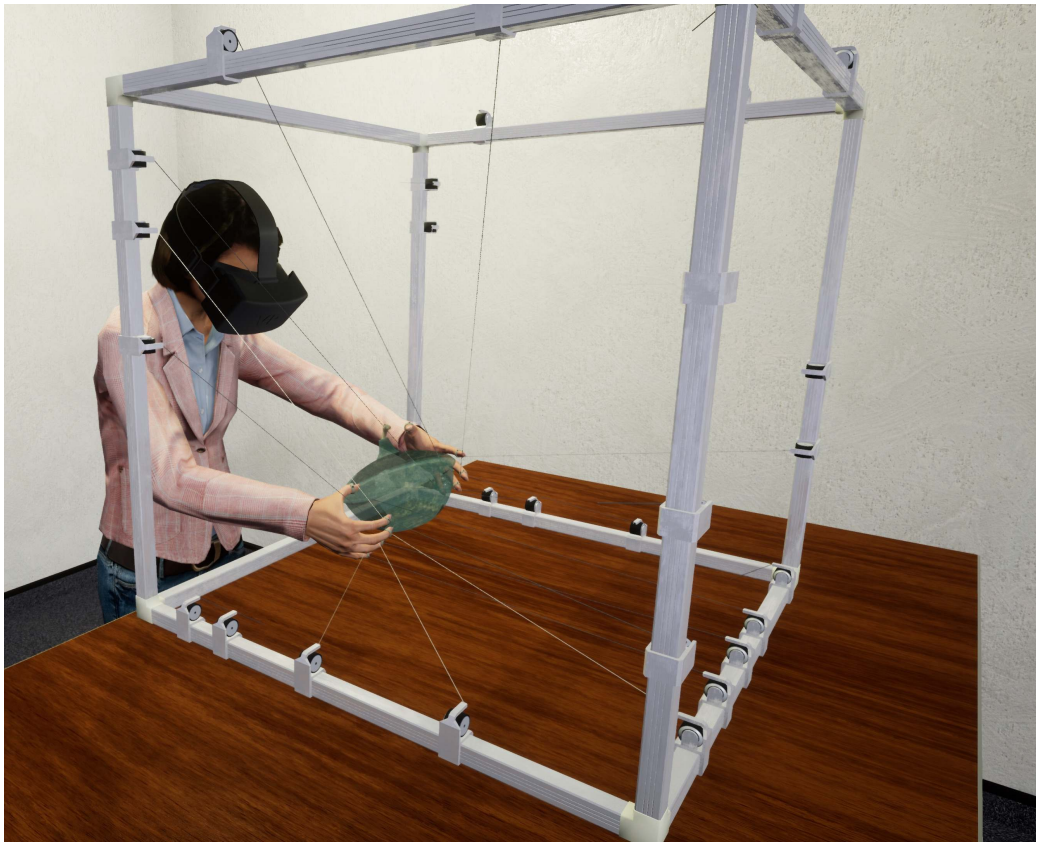
45°

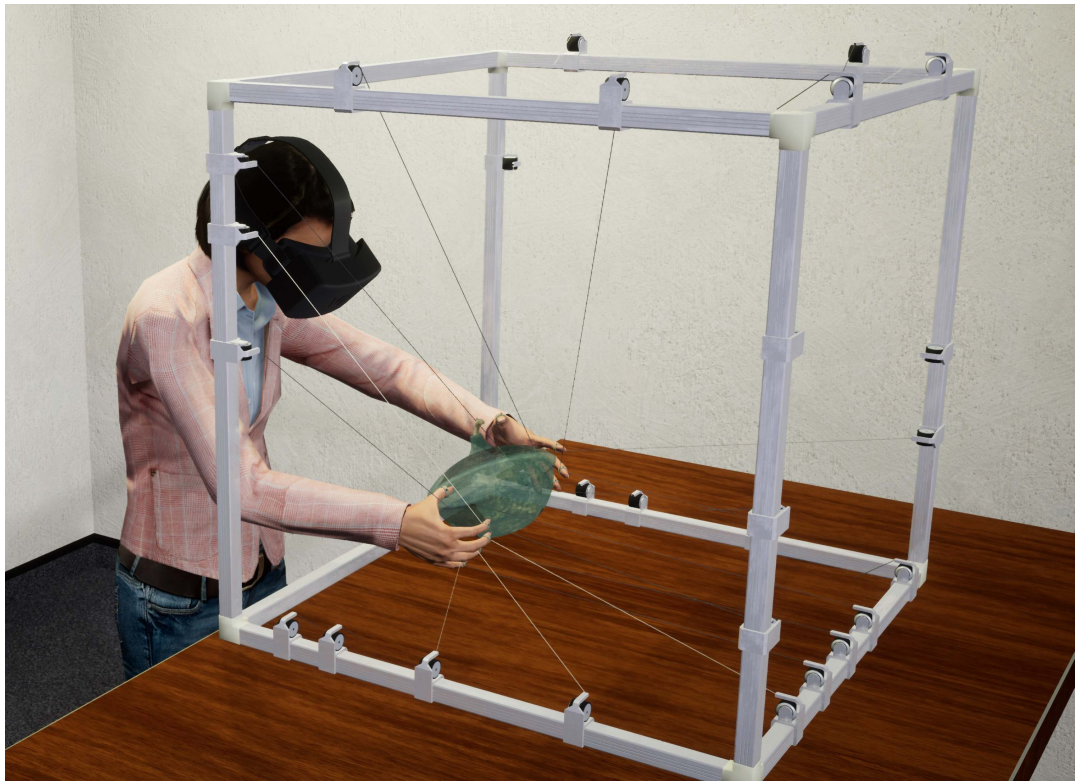


60°



90°

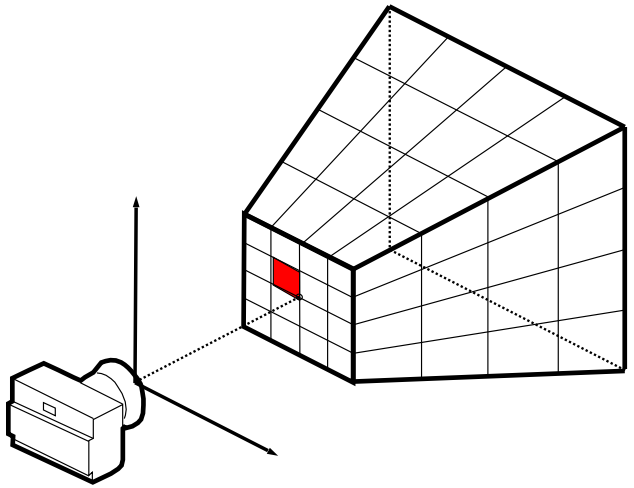




Was hat der FoV mit perspektivischer Projektion zu tun??

Asymmetrisches Frustum ("off-center perspective")

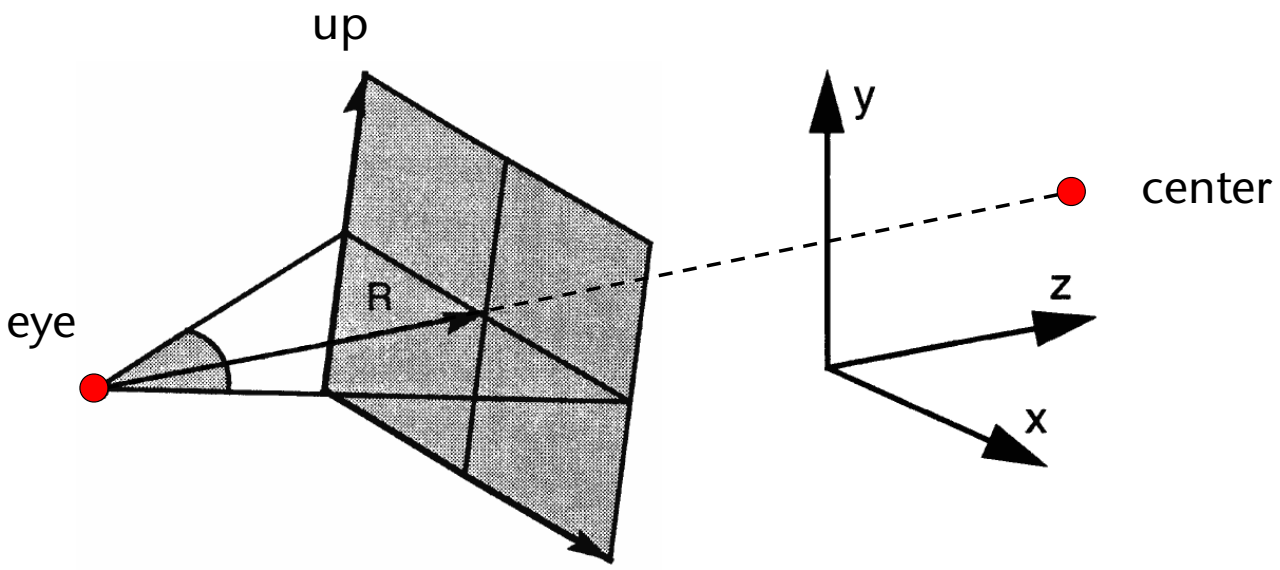
- Kommt manchmal vor, z.B.
  - Stereo-Projektion (s. VR-Vorlesung)
  - Rendern eines Posters mit 10000 x 10000 Pixel (Framebuffer zu klein)
- Projektionsmatrix muss “von Hand” generiert werden (mit **`QMatrix4x4::perspective()`** nicht möglich)



Hier ist left ≠ right, top ≠ bottom!

Festlegen der Kamera-Transformation mittels Qt

FYI




```
QMatrix4x4::lookAt( eyeX, eyeY, eyeZ,
                    centerX, centerY, centerZ,
                    upX, upY, upZ );
```

Die Projektionsmatrix in OpenGL

FYI

- Die Projektions-Matrix muss ab OpenGL 2+ manuell an das Shader-Programm übergeben werden
  - Man muss im Shader-Programm selbst die Transformation durchführen

```
glUniformMatrix4fv(
   // location of the uniforms in shader programm
   glUniformLocation(program_id, "matProjection"),
   1,                          // one 4x4 matrix
   GL_FALSE,                   // do not transpose
   matProjection.data() ); // pointer to float values
```

Host program (in C)

```
uniform mat4 matProjection;
// ...
void main() {
     gl_Position = matProjection * matCamera
                 * matModel * vPosition; }
```

Shader program (in GLSL)

FYI

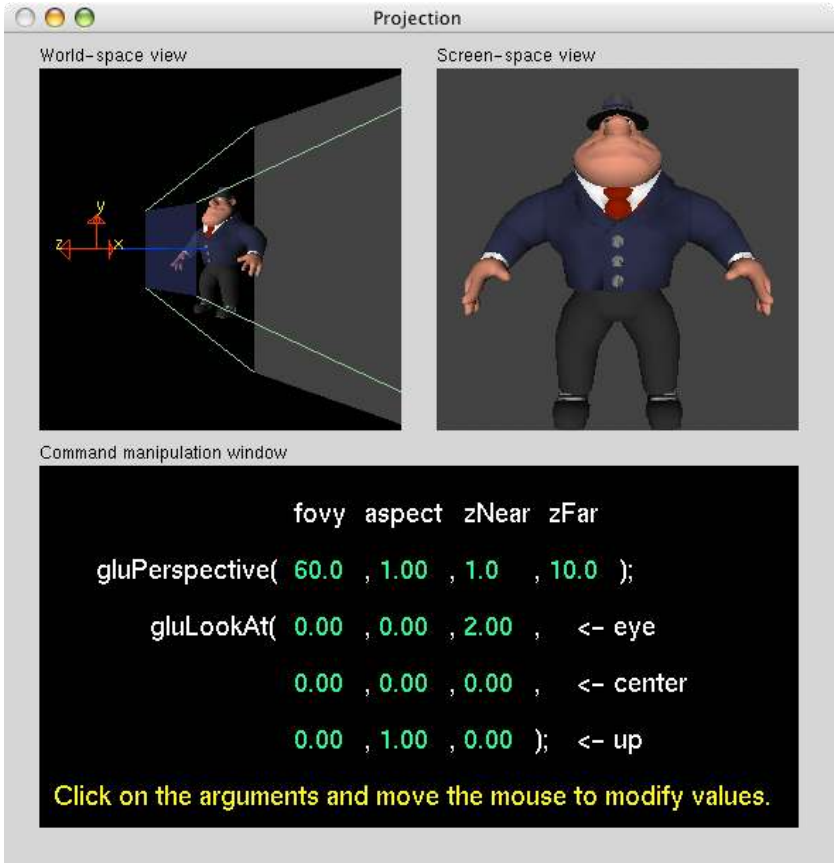
- Ein typisches OpenGL-Programm sieht dann ungefähr so aus:

```
glClear( GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT );
glUseProgram( program_id );                          // load shader
glBindVertexArray( vao );                            // select 'object'

glUniformMatrix4fv( locMatProjection, 1, GL_FALSE,   matProjection.data() );
glUniformMatrix4fv( locMatCamera,     1, GL_FALSE,   matCamera.data() );
glUniformMatrix4fv( locMatModelToWorld, 1, GL_FALSE, matModelToWorld.data() );

// render geometry …
```

Demo

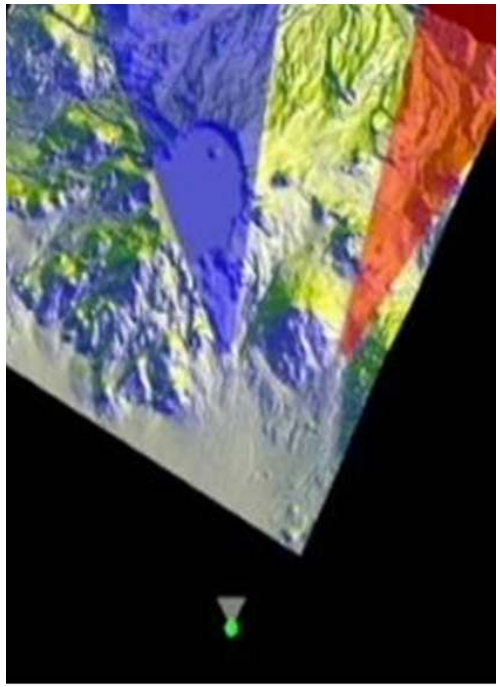


http://www.xmission.com/~nate/tutors.html

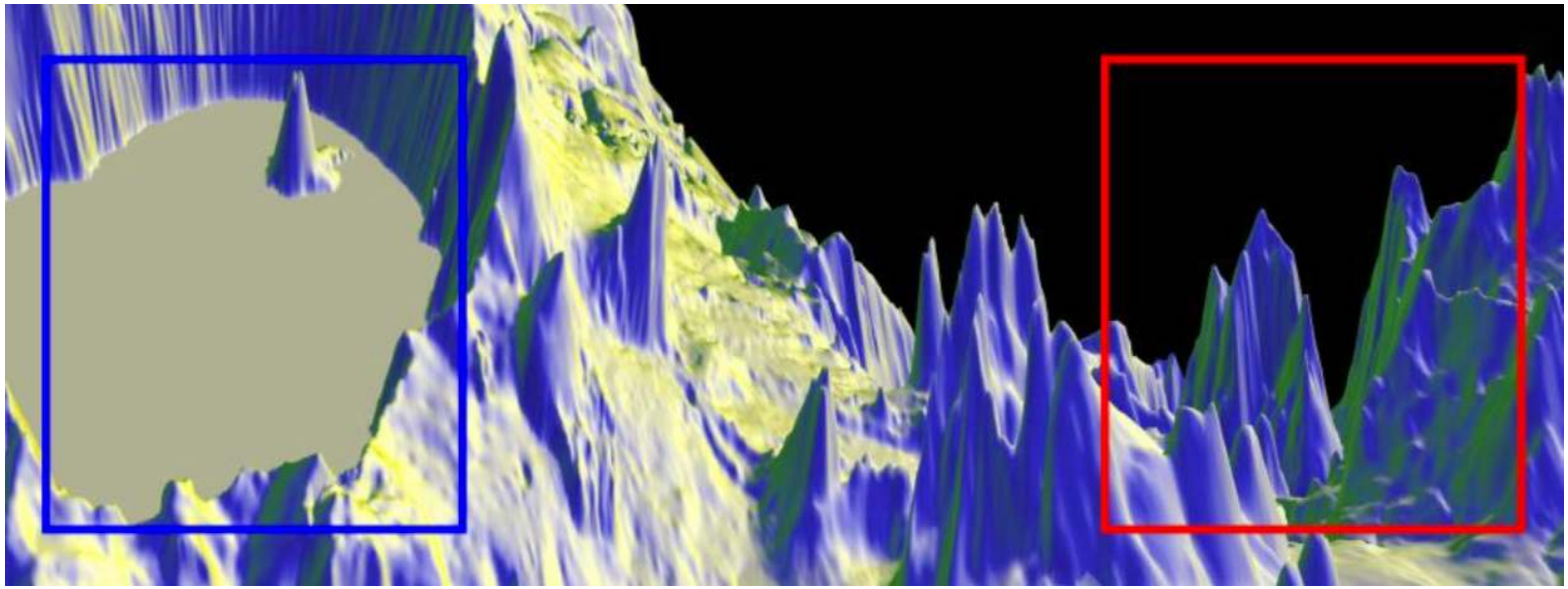
Bei Projektionen geht (zwangsläufig) Information verloren

Multi-Perspective

- Eine Visualisierungstechnik aus der Kategorie Focus+Context
- Beispiel: Hervorhebung von bestimmten Details

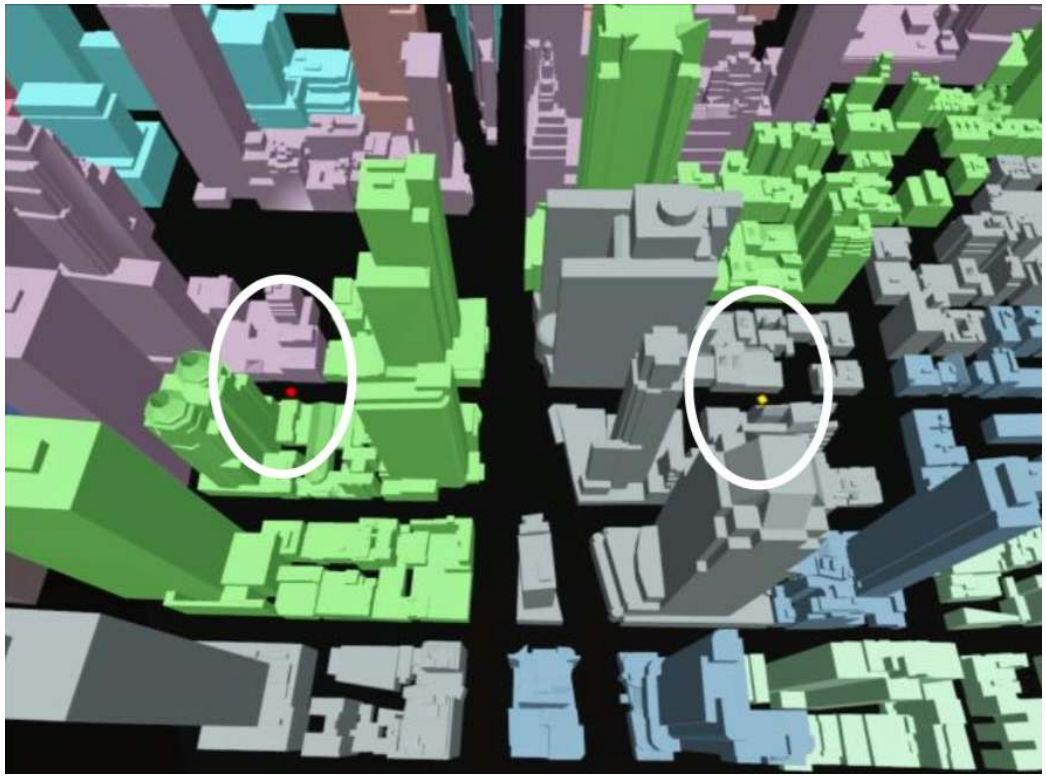


Vogelperspektive

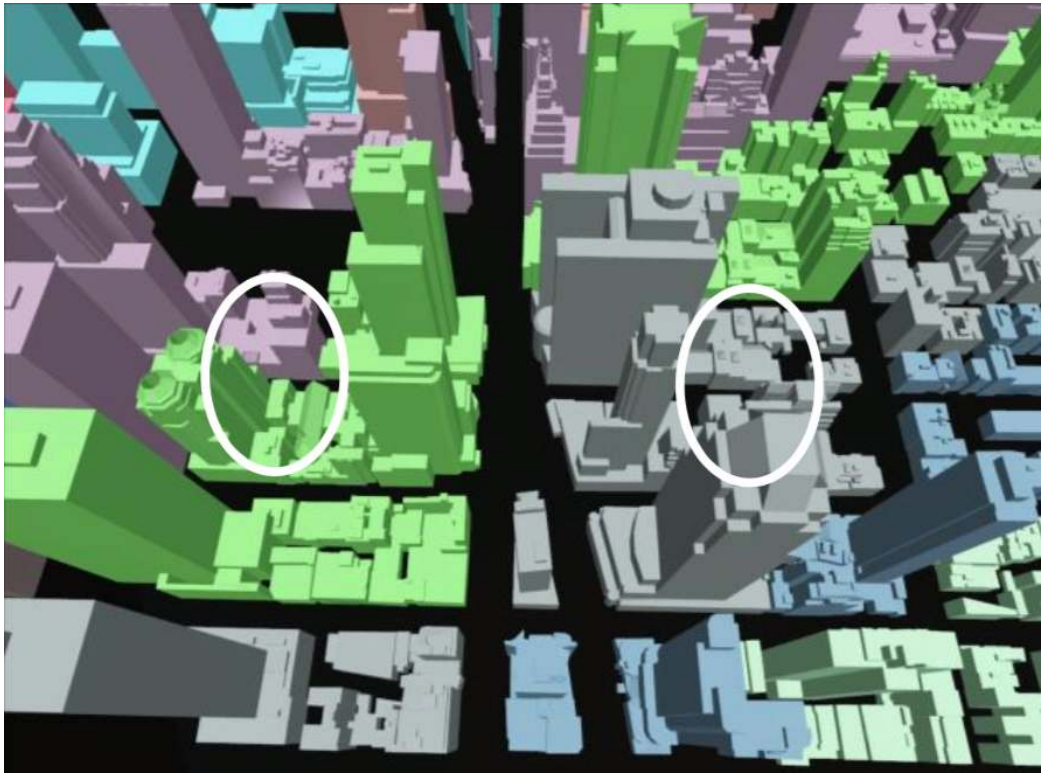


Ansicht für den User

- Beispiel: Occlusion wichtiger Teile der Szene vermeiden / auflösen

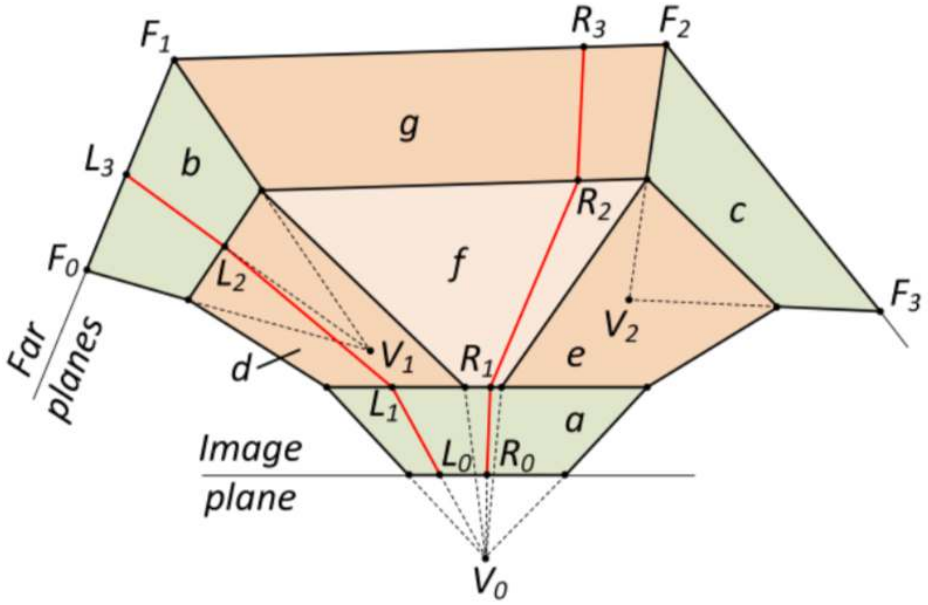


Roter und gelber Punkt sollen sichtbar sein

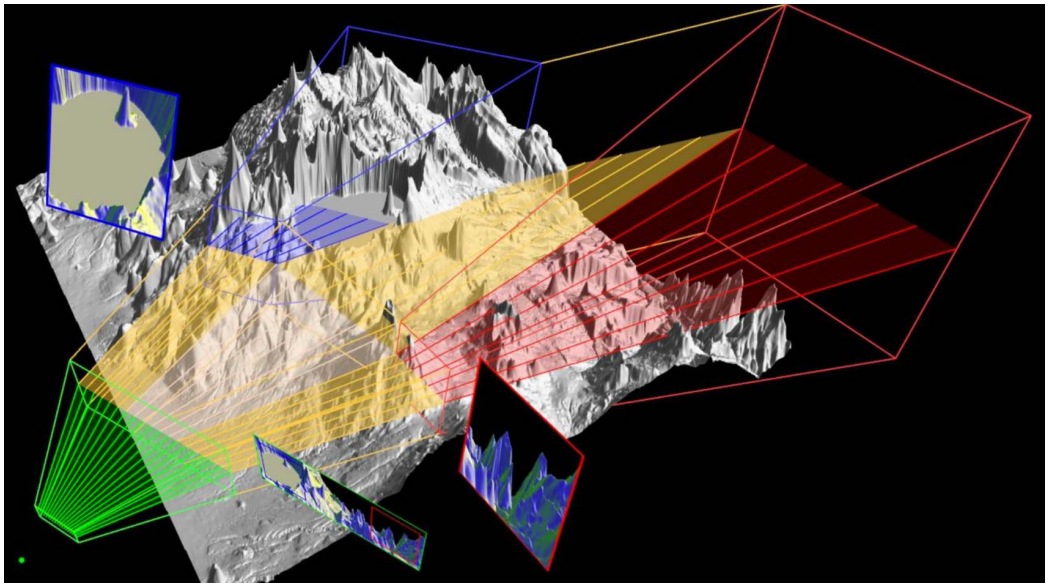


Bei normaler perspektivischer Projektion wären diese verdeckt

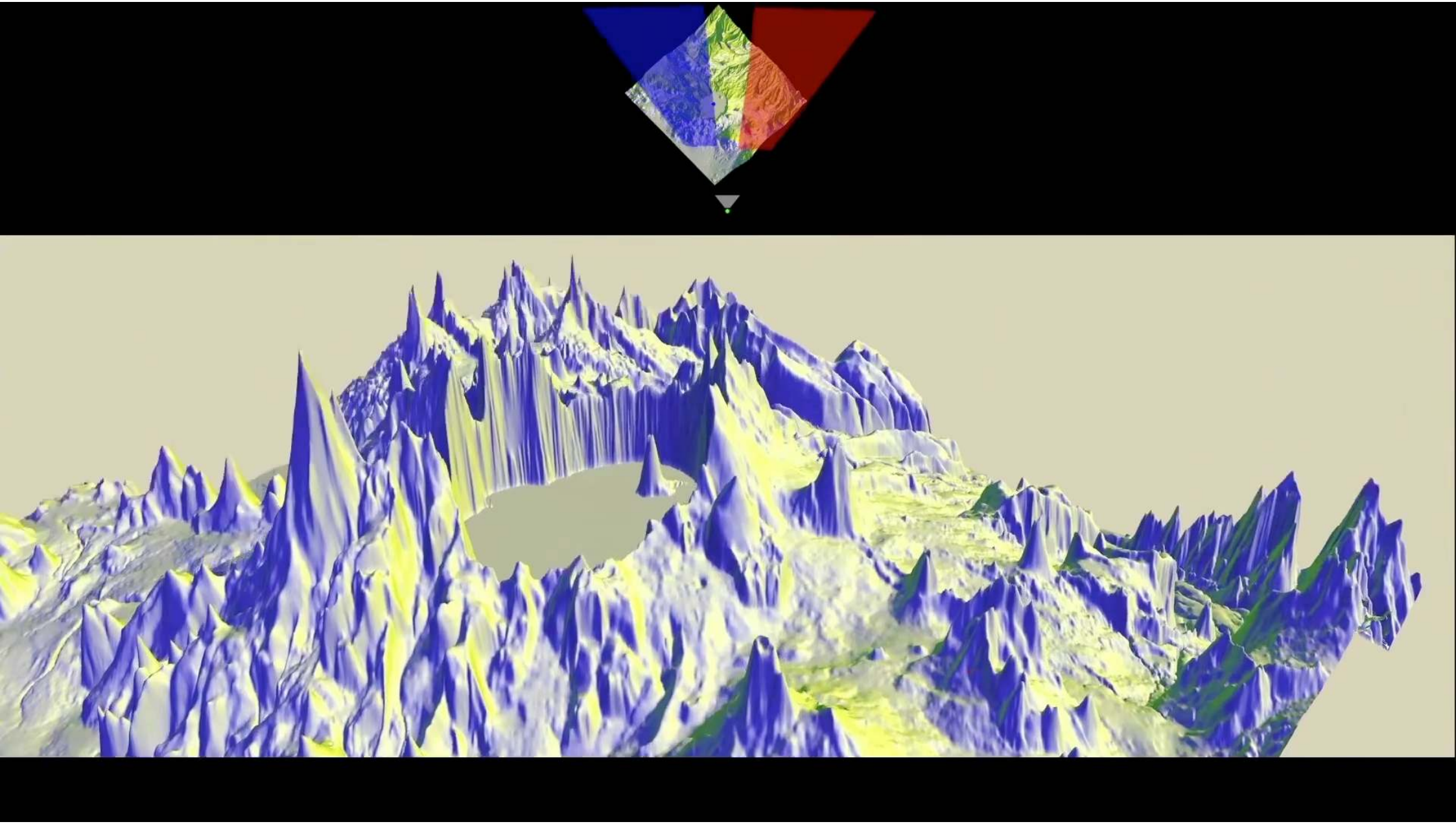
Hinweise zur Technik



Die Projektion wird durch mehrere View-Frusta definiert. Jedem Pixel wird ein Strahl zugeordnet, der mehrfach "gebrochen" werden kann durch die verschiedenen View-Frusta.

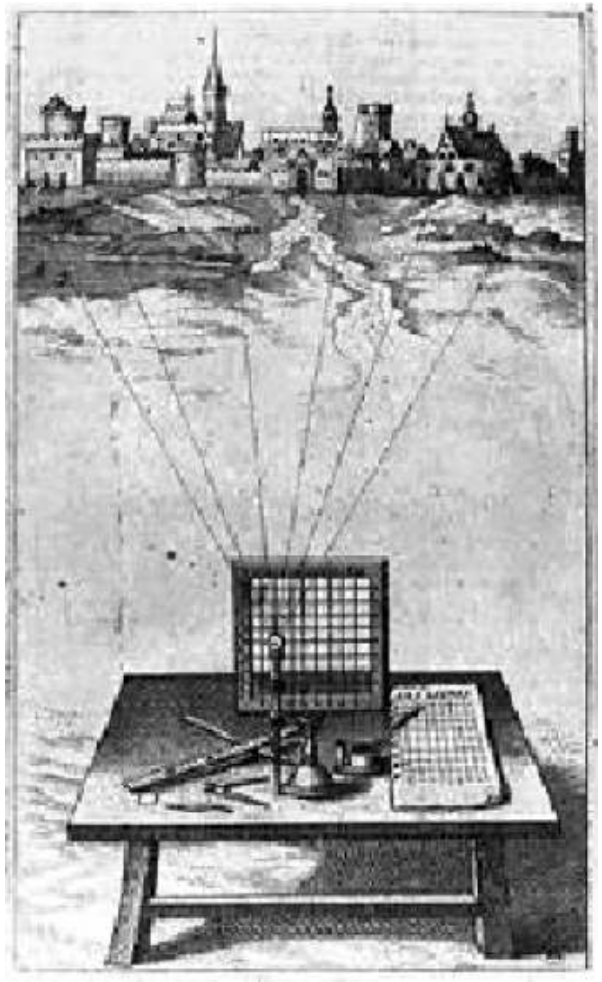


Visualisierung mehrerer dieser Strahlen



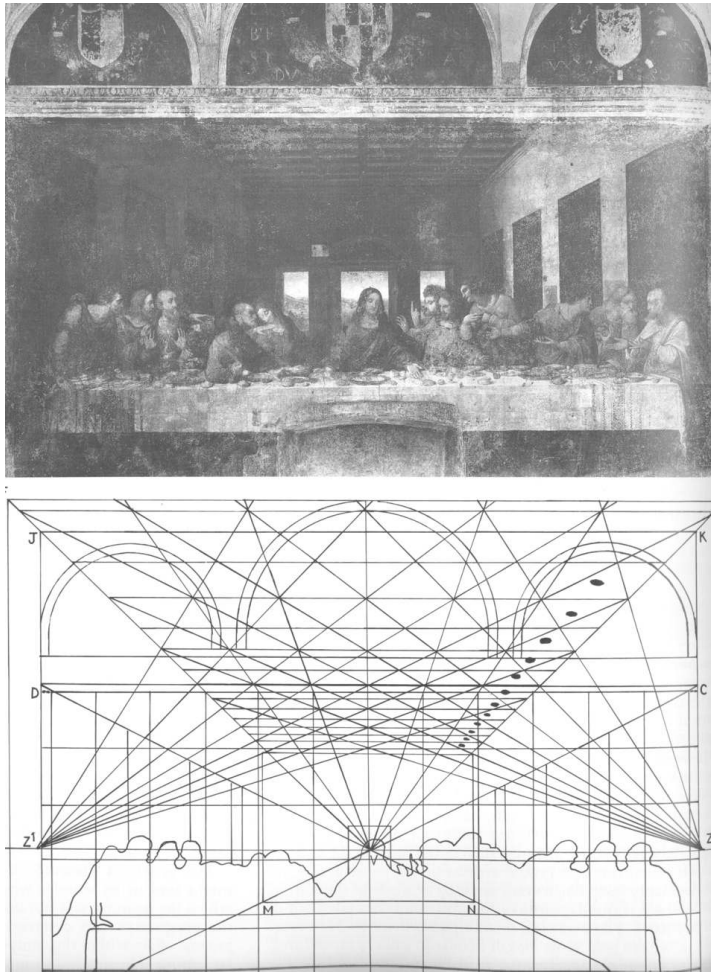
Noch einige Beispiele aus der Kunst

- Theoretisch wurde die Lösung des Problems der Perspektive von Leon Battista Alberti in seinem Buch *Della Pittura*, 1435-1436, beschrieben
- Brunelleschi löste es als erster praktisch 1410-1420



Alberti's *reticolato*

- Leonardo da Vinci sagte:
  There are some who look at the things produced by nature through glass, or other surfaces, or transparent veils. They trace outlines on the surface of the transparent medium... But such an invention is to be condemned in those who do not know how to portray things without it, how to reason about nature with their minds... They are always poor and mean in every invention and in the composition of narratives, which is the final aim of this science



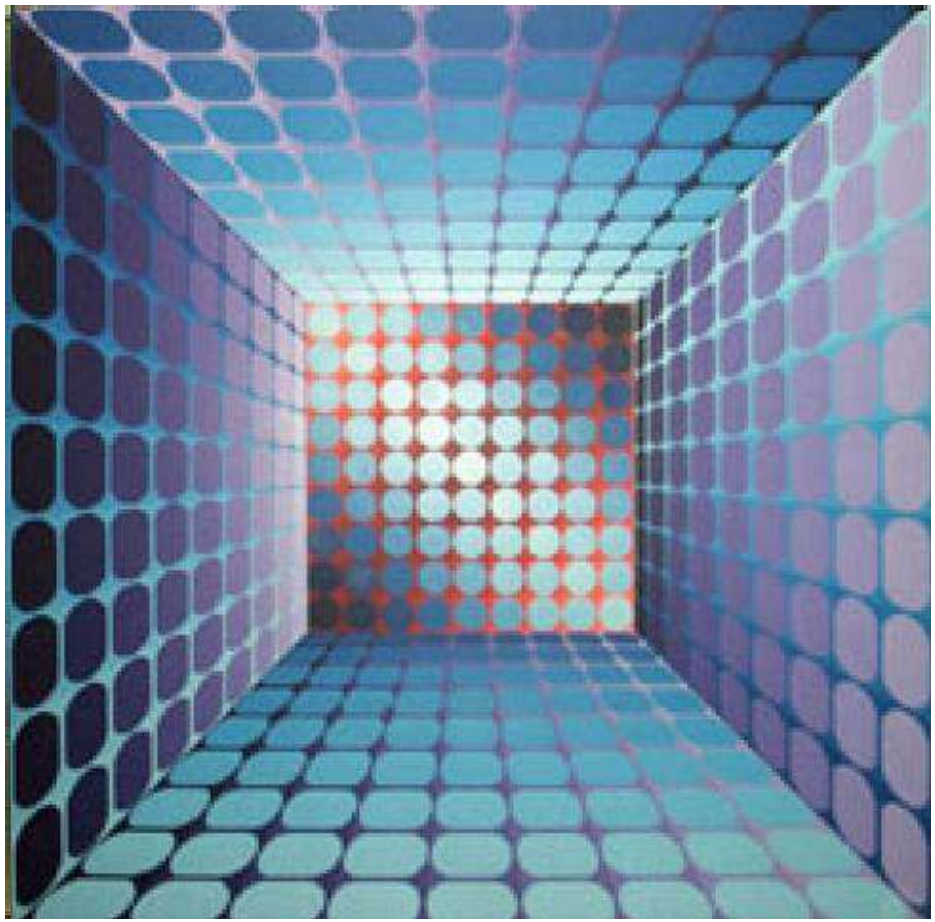
Erste gezielte Multi-Perspektive

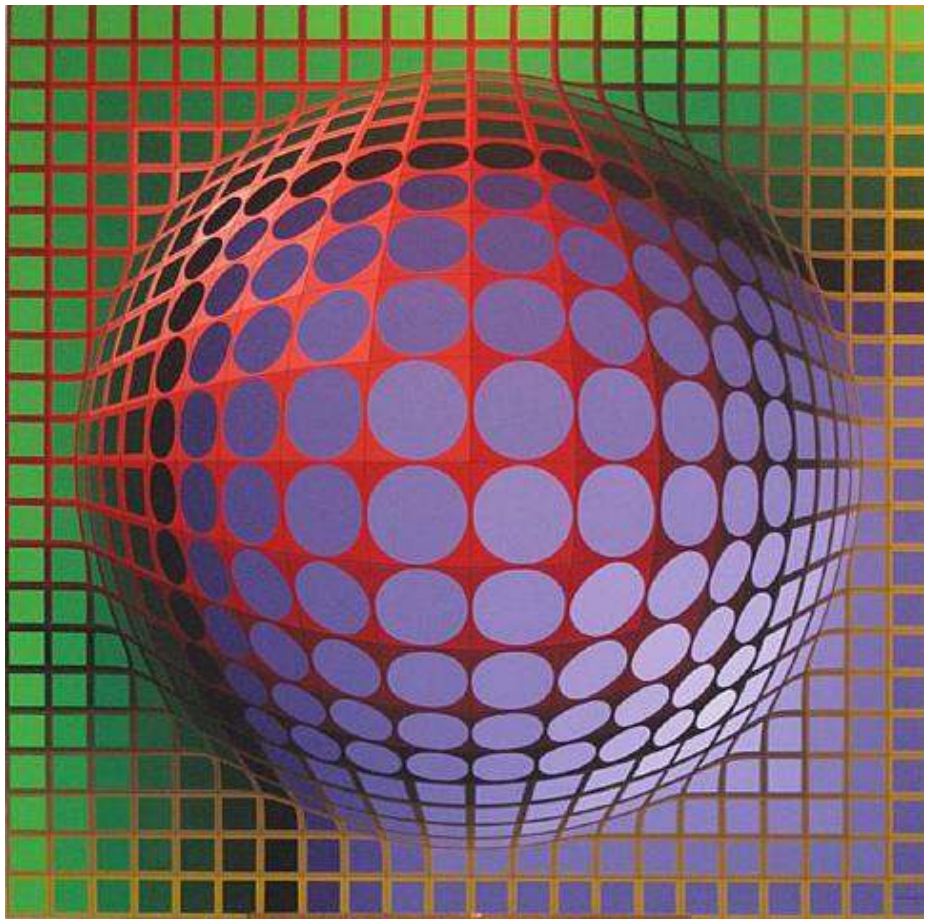
Raffael: *Die Schule von Athen*

Multi-Perspektive, um den mystischen Eindruck zu erhöhen

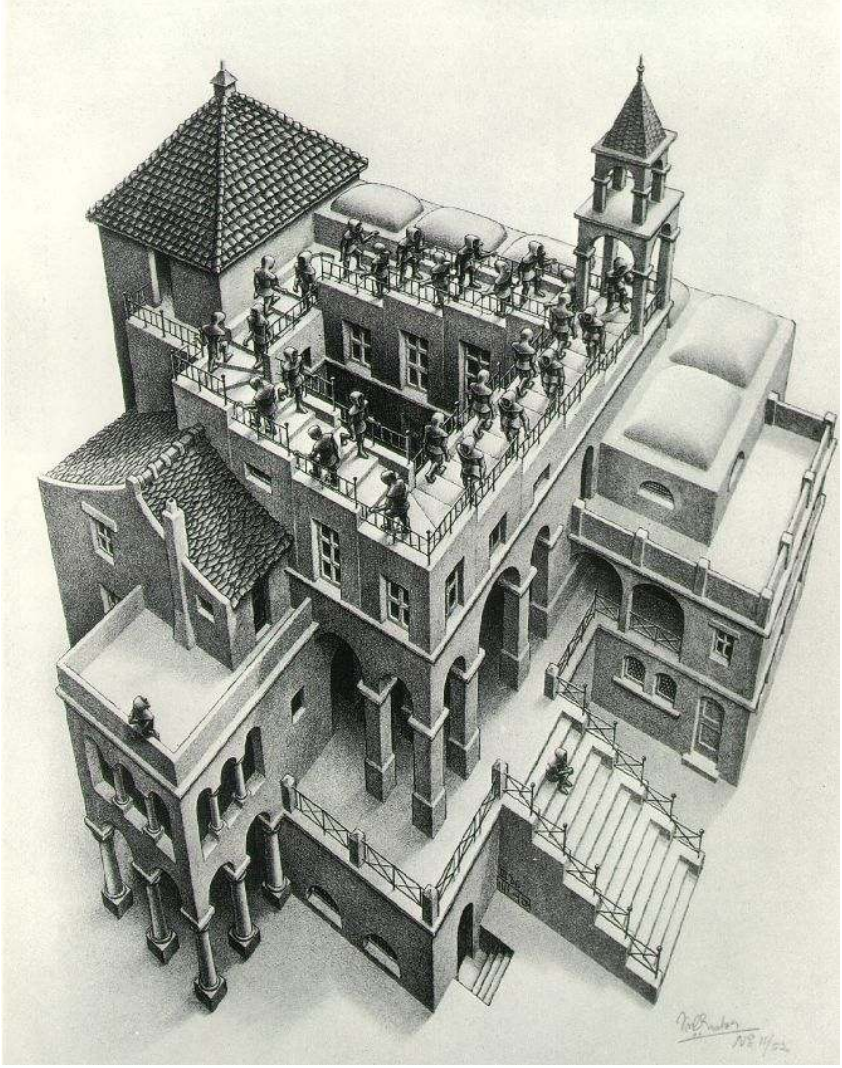
De Chirico

Viktor Vasarely: Perspektive in der abstrakten Kunst



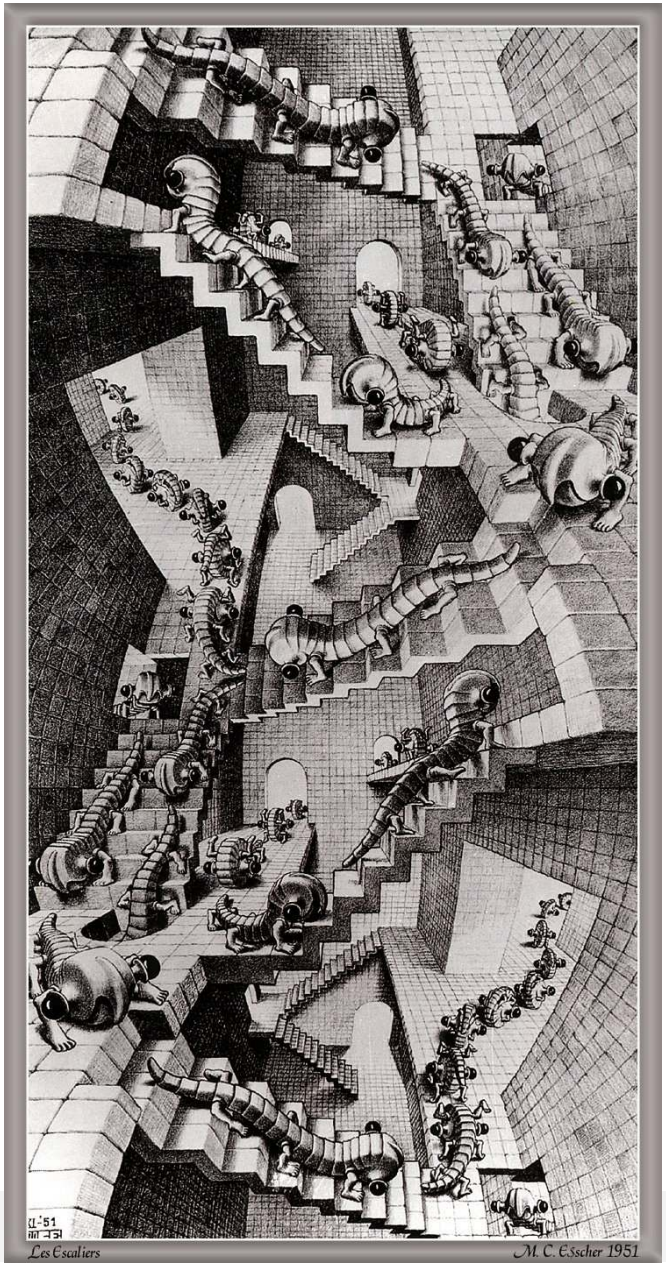


Einsatz der (korrekten) Perspektive zur Irritation des Betrachters

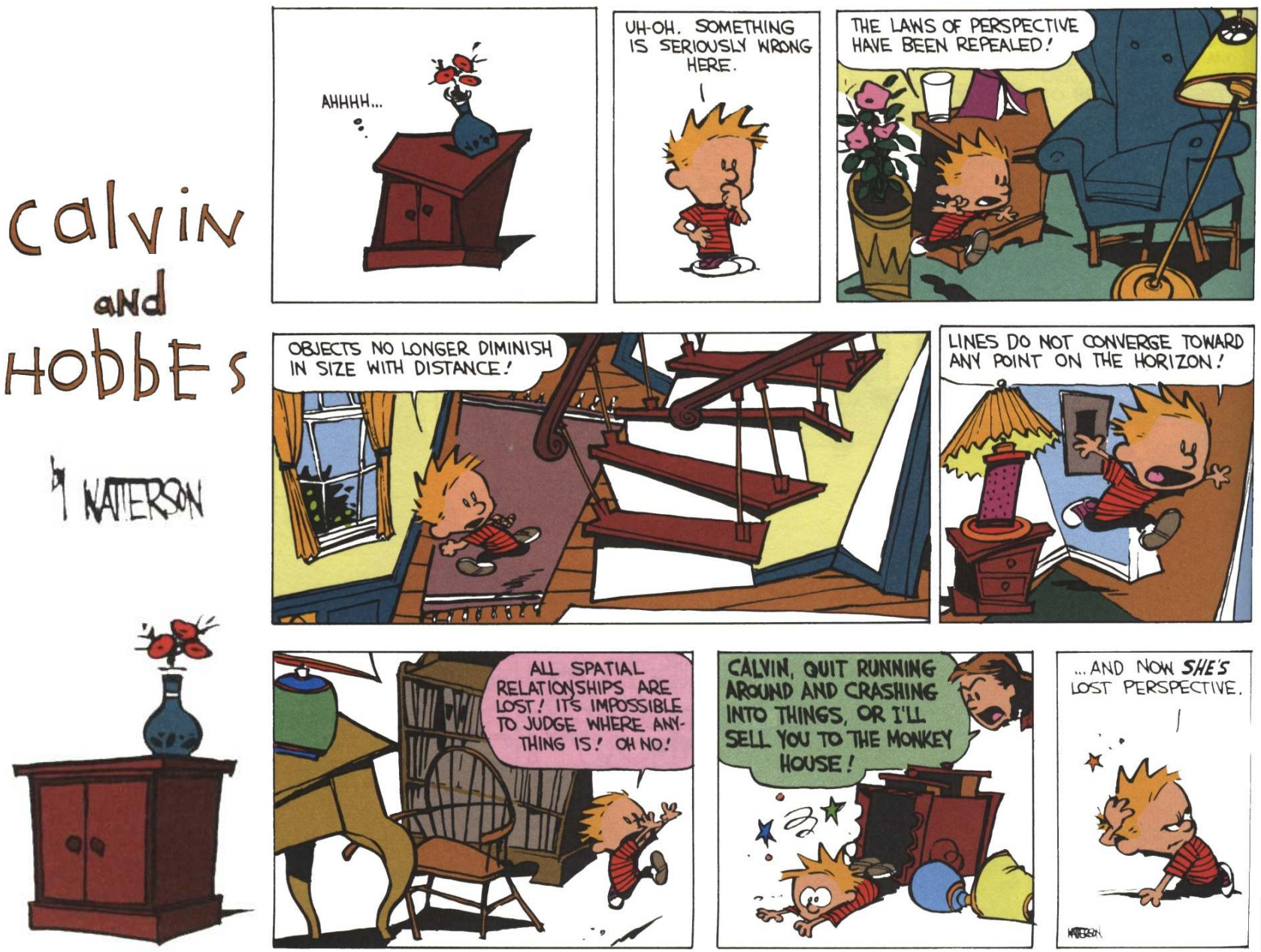


Maurits Cornelis Escher:
Ascending and Descending
1960, Lithograph

Nicht-lineare Perspektive



M. C. Escher


Calvin
and
Hobbes
by Watterson
AHHHH...
UH-OH. SOMETHING IS SERIOUSLY WRONG HERE.
THE LAWS OF PERSPECTIVE HAVE BEEN REPEALED!
OBJECTS NO LONGER DIMINISH IN SIZE WITH DISTANCE!
LINES DO NOT CONVERGE TOWARD ANY POINT ON THE HORIZON!
ALL SPATIAL RELATIONSHIPS ARE LOST! IT'S IMPOSSIBLE TO JUDGE WHERE ANYTHING IS! OH NO!
CALVIN, QUIT RUNNING AROUND AND CRASHING INTO THINGS, OR I'LL SELL YOU TO THE MONKEY HOUSE!
...AND NOW SHE'S LOST PERSPECTIVE.